BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI PADA GRAF KORONA BERLIAN DAN LINTASAN

Alfi Maulani[1]
[1] Universitas Pamulang, Jl. Raya Puspiptek, Tangerang Selatan
[1]dosen02330@unpam.ac.id

Abstrak

Bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf terhubung H merupakan salah satu permasalahan pewarnaan busur dalam teori graf. Banyaknya warna minimum yang diperlukan dalam pewarnaan busur-busur di H sehingga setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh suatu lintasan yang warnanya berbeda disebut bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf H yang dilambangkan $rc(H)$. Selanjutnya, operasi korona dari dua graf terhubung H tersebut menghasilkan graf baru $Br_n \odot P_m$ yang strukturnya mengambil n salinan pada $P_1, P, \dots, P_n$ dari P_m dan 1 (satu) salinan dari graf Br_n dengan n simpul kemudian menghubungkan simpul dari Br_n ke setiap simpul di P_i. Penelitian yang terkait dengan Br_4 dan P_m ini mengkaji tentang bilangan keterhubungan pelangi pada graf korona $Br_4 \odot P_m$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini berupa studi literatur. Pada hasil, penulis menyajikan bilangan keterhubungan pelangi pada graf korona $Br_4 \odot P_m$ yang dikembangkan dari operasi korona graf berlian Br_4 dan graf lintasan P_m.

Kata Kunci: bilangan keterhubungan pelangi; operasi korona; Br_4; P_m.

Abstract

The rainbow connection number of a connected graph H was one of edge-coloring problems in graph theory. Minimum number of colors required to color the edges in H so that each pair of vertices can be connected to a path of different color was called the rainbow connection number of graph H, denoted by $rc\ (H)$. Then, corona operation from two connected graph H constructed a new graph $Br_n \odot P_m$, the structure of which were taken n copied $P_1, P, \dots, P_n$ of graph P_m and 1 (one) copied of graph Br_n with n vertices, then connected vertices of Br_n to each vertex P_i. This study that related to Br_4 and P_m examines rainbow connection number of $Br_4 \odot P_m$. The method used in this research was literature study. On the results, we presented the rainbow connection number of $Br_4 \odot P_m$ which had constructed from corona operation of diamond graph Br_4 and path graph P_m.

Keywords: rainbow connection number; corona operation; Br_4; P_m.

Pendahuluan

Topik menarik yang berkembang dalam teori graf adalah masalah pelabelan (*graph labeling*) dan pewarnaan graf (*graph coloring*). Banyak permasalahan yang memiliki karakteristik seperti pewarnaan graf, yang membuat pewarnaan graf jenis ini menarik dan dapat dipelajari secara lebih mendalam. Pewarnaan graf dianggap awalnya muncul sebagai masalah pewarnaan peta, di mana warna setiap area batas pada peta berbeda untuk memudahkan pembedaan. Chartrand, dkk pada tahun 2008 pertama kali memperkenalkan konsep bilangan pelangi yang terhubung dalam graf (Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, 2008). Pewarnaan pelangi digunakan antara lain melindungi sandi transmisi, mengkonfigurasi beberapa saluran frekuensi ke beberapa pemancar untuk menghindari gangguan pada tingkat yang dapat diterima, dan menetapkan jadwal ujian sehingga semua siswa dapat mengikuti ujian untuk setiap mata pelajaran yang mereka ambil dengan jadwal ujian tidak akan sama dengan mata pelajaran yang lain.

Diasumsikan bahwa graf H adalah graf terhubung nontrivial dan bilangan bulat positif, ditentukan dengan pewarnaan busur: $E(H) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}, k \in N$, sehingga setiap dua busur bertetangga dapat berwarna sama. Apabila tidak ada dua busur mempunyai warna yang sama maka sebuah lintasan (*path*) disebut lintasan pelangi. Apabila setiap dua simpul yang berbeda pada Graf H dihubungkan oleh lintasan pelangi maka graf H dikatakan terhubung pelangi. Dalam hal ini, pewarnaan pada graf H disebut pewarnaan pelangi. Jika digunakan sebanyak k warna, maka pewarnaan tersebut dikatakan pewarnaan-k pelangi. Bilangan k disebut bilangan keterhubungan pelangi dari graf terhubung H, dinotasikan dengan $rc(H)$ dan didefinisikan sebagai jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk menghubungkan pelangi pada pewarnaan busur graf H.

Li dan Sun pada tahun 2013 telah mengemukakan bilangan keterhubungan pelangi dalam suatu graf yang layak untuk dipelajari (Li, Shi, & Sun, 2013). Pada tahun 2008, Chartrand dkk telah mengemukakan beberapa bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari berbagai kelas graf khusus seperti graf lintasan (P_m), graf pohon (T_m), graf lengkap (K_m), graf roda (W_m), graf bipartit lengkap ($K_{(m,n)}$), dan graf multipartit lengkap ($K_{(m,m,m)}$). Shulhany dan Salman (Shulhany & Salman, 2015) kemudian mengemukakan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf berlian Br_n. Penelitian tentang Graf Berlian telah dilakukan oleh (Akadji, Taha, Lakisa, & Yahya, 2019), (RIEZSA DESSYLUVIANI, 2017), (Ryt, 2012), (Sulistiyono, Slamin, Dafik, Agustin, & Alfarisi, 2020) dan (Baumgartner & Larson, 1990). Pada tahun 2020, Maulani dkk mengemukakan nilai eksak keterhubungan pelangi dari berbagai graf korona, seperti $C_m \odot P_n$ dan $C_m \odot C_n$ (Maulani, Pradini, Setyorini, & Sugeng, 2020). Selain itu, tahun 2019 Maulani mengemukakan nilai-nilai eksak keterhubungan pelangi dari berbagai graf korona, seperti $C_m \odot P_n$, $W_m \odot P_n$, $F_m \odot P_n$ dan sebagainya (Maulani, 2019).

Metode Penelitian

Penelitian ini murni tentang pengembangan teori. Langkah awal penelitian ini adalah mengkaji dan menganalisis berbagai literatur, serta metode pembuktian teorema terkait dengan konsep bilangan terhubung pelangi yang digunakan oleh peneliti sebelumnya. Peneliti kemudian mengembangkan teori dengan menentukan bilangan keterhubungan pelangi (*rainbow connection*) untuk graf korona dari graf berlian (Br_n) dan graf lintasan (P_m) serta memberikan pembuktiannya. Langkah-langkah untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) menentukan lintasan keterhubungan pelangi (*rainbow connection*) untuk setiap dua pasang simpul; (2) menentukan bilangan keterhubungan pelangi (*rainbow connection*) pada graf korona dan membuktikan keakuratan hasilnya; (3) menganalisis teorema terbukti; (4) menarik kesimpulan dari hasil analisis teorema terbukti.

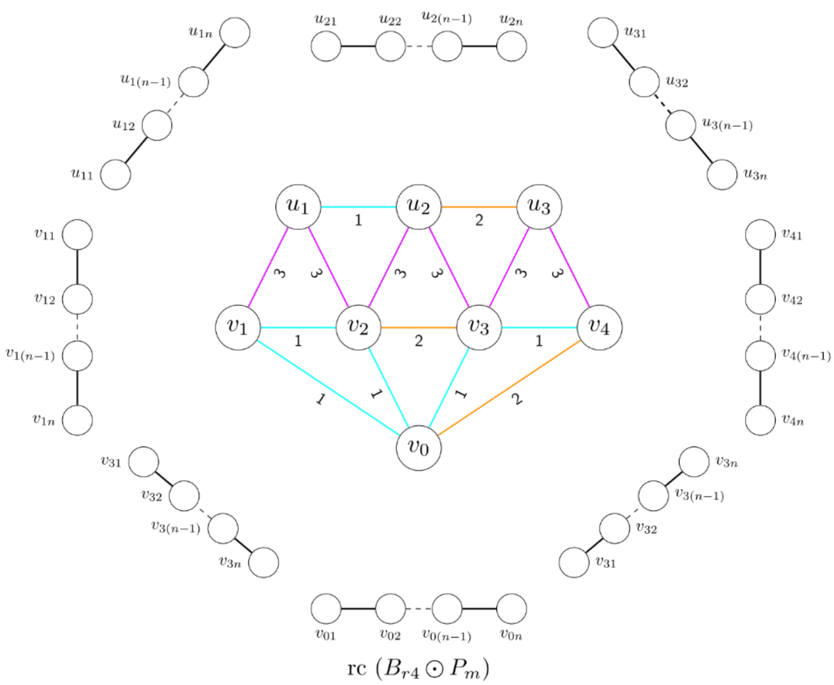
Hasil dan Pembahasan

Bilangan Keterhubungan Pelangi (rc) dari Graf Korona $Br_4 \odot P_m$

Pada bagian ini diberikan langkah-langkah pembuktian dari teorema 1 tentang bilangan keterhubungan pelangi graf korona $Br_4 \odot P_m$ yang dinotasikan dengan $rc(Br_n \odot P_m) = 6$, untuk $n = 4, m \geq 2$ yang terbagi menjadi 2 kasus pembuktian.

Kasus pembuktian yang pertama yaitu kita akan menunjukkan bahwa $(Br_n \odot P_m) \geq 6$. Seperti yang telah kita ketahui bahwa Graf Br_4 merupakan graf terhubung sehingga graf Br_4 memiliki bilangan keterhubungan pelangi seperti yang terlihat pada Gambar 1. Menurut definisi graf korona, struktur dari $Br_4 \odot P_m$ terdiri dari 1(satu) graf berlian Br_4 yang dihubungkan dengan $8-$ salinan graf P_m, sebut $P_i^*; i = 1, \ldots, 8$. $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}$ melambangkan simpul-simpul di P_i^*; $i = 0, 1, \ldots, m$ seperti yang terlihat pada Gambar 2. Pada Gambar 2 tersebut, setiap simpul v_1 di $V(Br_4)$ dengan simpul $v_{ij}, j = 1, \ldots, n$ di $V(P_1^*)$ saling bertetangga sehingga dihasilkan lintasan v_{1j}, v_{1n} di P_1^* karena P_1^* graf terhubung maka terdapat simpul v_{1n} di $V(P_1^*)$. Tampak jelas pada Gambar 2 bahwa $v_{1n} \in V(P_1^*)$ dengan $v_1 \in V(Br_4)$ saling bertetangga. Menurut Teorema Graf Berlian, Br_4 adalah graf terhubung pelangi sehingga untuk setiap 2 simpul di Br_4, terdapat lintasan pelangi di Br_4. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $v_i, v_m \in V(Br_4)$ dimana v_i bertetangga dengan simpul-simpul di P_i^* dan v_m bertetangga dengan simpul-simpul di P_m^*. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 2.

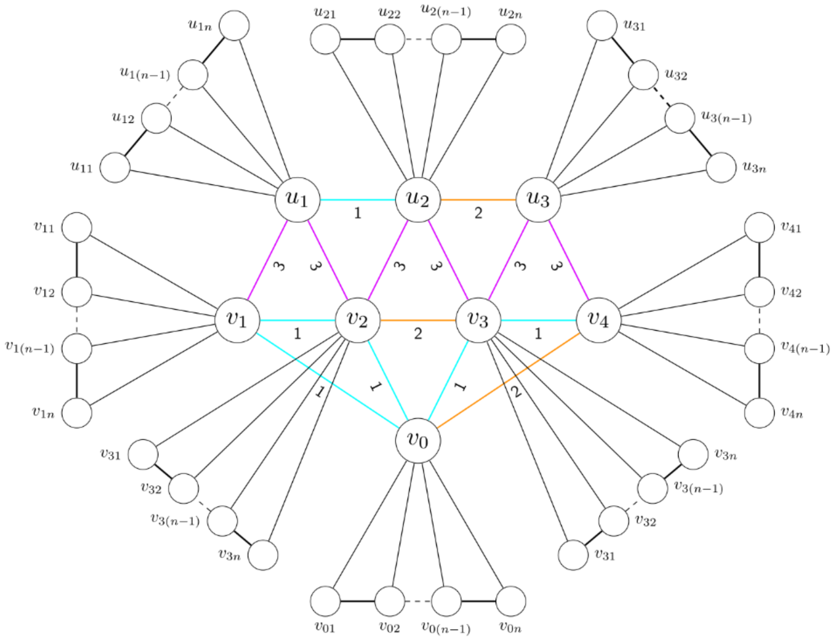
Menurut teorema Graf Berlian, diperoleh $rc(Br_4) = 3$. Seperti yang terlihat pada Gambar 2, busur penghubung $v_i \in V(Br_4)$ dengan $v_{ij}, j = 1, \dots, n$ menggunakan pemilihan dua warna. Selanjutnya, kita akan menunjukkan langkah pemilihan 2 warna pada busur penghubung $v_i \in V(Br_4)$ dengan $v_{ij}, j = 1, \dots, n$. Misalkan busur penghubung $v_i \in V(Br_4)$ dengan $v_{ij}, j = 1, \dots, n$ menggunakan dua warna, yaitu warna 4 (*RoyalPurple*) dan 5 (*Turquoise*).



Gambar 1. Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf Br_4 yang dikelilingi dengan 8 salinan graf P_m

Berdasarkan lintasan $v_{1j} - v_{mn}$ dengan $v_{1j} \in V(P_1^*)$ dan $v_{mn} \in V(P_m^*)$, terdapat dua kemungkinan yaitu: (1) jika warna $v_m v_{mn}$ atau warna $u_m u_{mn}$ adalah 4 (*RoyalPurple*) maka lintasan $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{mn}$ atau $v_{1j} - u_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, u_i, \dots, u_m, u_{mn}$ merupakan lintasan pelangi. Hal ini menyatakan bahwa, panjang lintasan $v_{1j} - v_{mn}$ atau $v_{1j} - u_{mn}$ adalah $rc(Br_4) + 2 = 3 + 2 = 5$; (2) jika warna $v_m v_{mn}$ atau warna $u_m u_{mn}$ adalah 5 (*Turquoise*) maka lintasan $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{m(n-1)}, v_{mn}$ atau $v_{1j} - u_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, u_i, \dots, u_m, u_{mn}$ memiliki panjang lintasan $v_{1j} - v_{mn}$ atau $v_{1j} - u_{mn}$ yaitu $rc(Br_4) + 3 = 3 + 3 = 6$. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 3. Berdasarkan penjelasan kasus pembuktian yang pertama di atas, terbukti bahwa $rc(Br_n \odot P_m) \geq 6$.

Selanjutnya, kasus pembuktian yang kedua yaitu kita akan menunjukkan bahwa $rc(Br_n \odot P_m) \leq 6$. Seperti yang telah kita ketahui bahwa Graf Br_4 merupakan graf terhubung sehingga graf Br_4 memiliki bilangan keterhubungan pelangi seperti yang terlihat pada Gambar 1. Menurut definisi graf korona, struktur dari $Br_4 \odot P_m$ terdiri dari 1(satu) graf berlian Br_4 yang dihubungkan dengan $8-$ salinan graf P_m, sebut $P_i^*; i = 1, \dots, 8$. $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$ melambangkan simpul-simpul di P_i^*; $i = 0,1, \dots, m$ seperti yang terlihat pada Gambar 2. Pada Gambar 2 tersebut, setiap simpul v_1 di $V(Br_4)$ dengan simpul $v_{ij}, j = 1, \dots, n$ di $V(P_1^*)$ saling bertetangga sehingga dihasilkan lintasan v_{1j}, v_{1n} di P_1^* karena P_1^* graf terhubung maka terdapat simpul v_{1n} di $V(P_1^*)$. Tampak jelas pada Gambar 2 bahwa $v_{1n} \in V(P_1^*)$ dengan $v_1 \in V(Br_4)$ saling bertetangga.

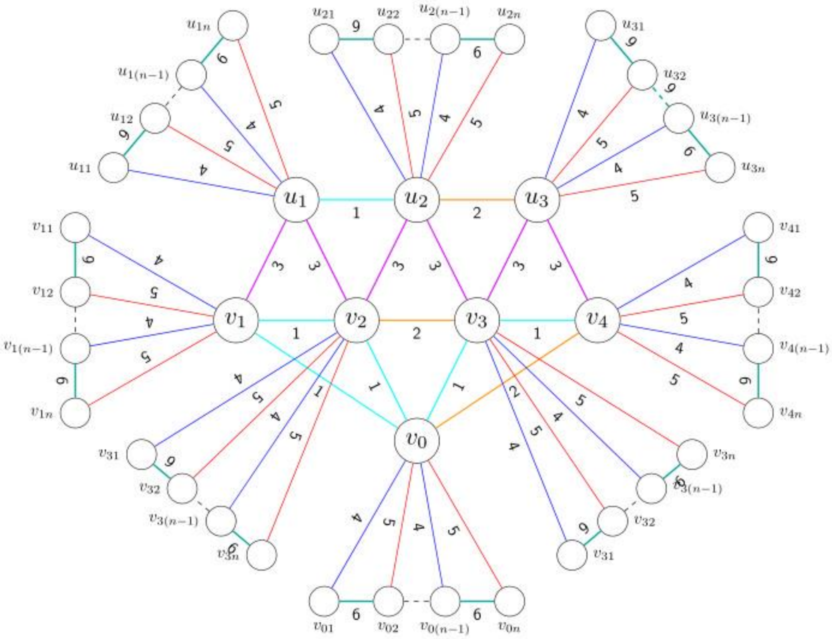


rc $(B_{r4} \odot P_m)$

Gambar 2. Struktur $Br_4 \odot P_m$ terdiri dari 1 graf Br_4 yang dihubungkan dengan 8 salinan graf P_m.

Sebagaimana terlihat pada Gambar 2 di atas, menurut teorema Graf Berlian dapat diperoleh rc(Br_4) = 3 dan menurut teorema Graf Kipas $rc(F_n) = 2$; $3 \leq n \leq 6$ dan $rc(F_n) = 3$; $n \geq 7$, kita akan menunjukkan bahwa $rc(Br_4 \odot P_m) \leq 6$ yang terbagi menjadi 4 kemungkinan yaitu: (1) jika $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(Br_4)$ maka bilangan keterhubungan pelangi dari Graf Berlian Br_4 adalah 3; (2) jika $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(P_i^*); i = 0,1,2,3,4$ maka bilangan keterhubungan pelangi dari Graf Kipas Fn adalah 2; $3 \leq n \leq 6$ dan 3; $n \geq 7$ karena v_a merupakan simpul pusat v_p; (3) jika $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(P_i^*)$, $i = 0,1,2,3,4$ maka lintasan $v_b - v_p - \cdots - v_a$ memiliki panjang lintasan 2 dengan $v_a \in V(Br_4)$ karena v_a bukan simpul pusat v_p; (4) jika $v_a \in V(P_i^*), v_b \in V(P_j^*), i, j = 0,1,2,3,4$ maka panjang lintasan $v_a v_b$ atau v_a, u_b atau u_a, v_b adalah $rc(Br_4) + \mathbf{3} = 3 + \mathbf{3} = \mathbf{6}$ dikarenakan $Br_4 \odot P_m$ terbentuk dari graf kipas yang pusatnya $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3\}$ saling terhubung oleh satu lintasan dan membentuk sebuah graf berlian Br_4 sehingga graf kipas sebanyak 8 tersebut hanya membutuhkan penambahan tiga warna menurut definisi Graf Lintasan P_m. Berdasarkan penjelasan kasus pembuktian yang kedua di atas, terbukti bahwa $rc(Br_n \odot P_m) \leq 6$.

Oleh karena itu, berdasarkan penjelasan kasus pembuktian pertama dan kasus pembuktian kedua yang telah dipaparkan, dapat dibuktikan bahwa untuk bilangan bulat m, n dengan $n = 4, m \geq 2$, bilangan keterhubungan pelangi untuk Graf korona $rc(Br_4 \odot P_n) = 6$.



Gambar 3. Bilangan Keterhubungan Pelangi pada Graf Korona $Br_4 \odot P_m$.

Simpulan dan Saran

Kesimpulan yang dapat diperoleh dari hasil penelitian dan pembahasan bahwa bilangan keterhubungan pelangi yang dikembangkan dari operasi korona graf berlian Br_n dan graf lintasan P_m ini dapat menentukan bilangan keterhubungan pelangi graf korona $Br_4 \odot P_m$.

Bilangan keterhubungan pelangi graf korona $Br_4 \odot P_m$ yang dinotasikan dengan $rc(Br_4 \odot P_m)$ tersebut memiliki nilai $rc(Br_n \odot P_m) = rc(Br_n) + 3$ untuk $m \geq 2, n =$

4 . Lebih lanjut, visualisasi $rc(Br_4 \odot P_m)$ yang terlihat pada gambar 3 tersebut dilakukan dengan proses komputasi atau *computer code*.

Referensi

Akadji, A. F., Taha, D., Lakisa, N., & Yahya, N. I. (2019). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Amalgamasi Graf Berlian. *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, *7*(2), 56–61. https://doi.org/10.34312/euler.v7i2.10345

Baumgartner, J. E., & Larson, J. A. (1990). A diamond example of an ordinal graph with no infinite paths. *Annals of Pure and Applied Logic*, *47*(1), 1–10. https://doi.org/10.1016/0168-0072(90)90013-R

Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, P. (2008). No Title. *Rainbow Connection in Graph*, *133*(1), 85–98. Retrieved from https://www.emis.de/journals/MB/133.1/mb133_1_

8.pdf

Li, X., Shi, Y., & Sun, Y. (2013). Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics*, *29*(1), 1–38. https://doi.org/10.1007/s00373-012-1243-2

Maulani, A. (2019). Bilangan Keterhubungan Pelangi Dan Keterhubungan Pelangi Kuat Pada Beberapa Kelas Graf Korona. *Statmat : Jurnal Statistika Dan Matematika*, *1*(1), 117–130. https://doi.org/10.32493/sm.v1i1.2378

Maulani, A., Pradini, S., Setyorini, D., & Sugeng, K. A. (2020). Rainbow connection number of Cm o Pn and Cm o Cn. *Indonesian Journal of Combinatorics*, *3*(2), 95. https://doi.org/10.19184/ijc.2019.3.2.3

RIEZSA DESSYLUVIANI, S. (2017). Penentuan Rainbow Connection Number Dan Strong Rainbow Connection Number Pada Graf Berlian. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(3), 93. https://doi.org/10.25077/jmu.6.3.93-99.2017

Ryt, P. (2012). *Midsummer Combinatorial Workshop 2012*.

Shulhany, M. A., & Salman, A. N. M. (2015). Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UMS*, 916–923.

Sulistiyono, B., Slamin, Dafik, Agustin, I. H., & Alfarisi, R. (2020). On rainbow antimagic coloring of some graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, *1465*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1465/1/012029