PENYELESAIAN NUMERIK MASALAH SYARAT BATAS ROBIN PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY-EULER

Ummu Habibah[1], Mohamad Handri Tuloli[2], Viva Rimanada[3], Tomas Goncalves Ferreira[4]
[1,2,3,4]Universitas Brawijaya, Jl. Veteran Malang, Jawa Timur
[1]ummu_habibah@ub.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas bagaimana penyelesaian numerik persamaan diferensial Cauchy-Euler dengan syarat batas Robin. Ada beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik suatu permasalahan nilai batas yaitu metode beda hingga, metode tembakan (*shooting*), metode kolokasi, dan lain-lain. Pada penelitian ini, penyelesaian numerik masalah syarat batas Robin diperoleh dengan menggunakan metode beda hingga pusat dan metode tembakan (shooting). Dari kedua metode tersebut dibandingkan error numeriknya terhadap penyelesaian eksaknya. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode tembakan (*shooting*) menghasilkan solusi numerik yang lebih baik untuk mengaproksimasi penyelesaian persamaan diferensial Cauchy-Euler dibandingkan metode beda hingga pusat karena menghasilkan kesalahan numerik yang lebih kecil.

Kata Kunci: Cauchy-Euler; Metode beda hingga; metode tembakan; syarat batas Robin

Abstract

This research studied how the numerical solution of the Cauchy-Euler differential equation with Robin boundary conditions. There were several numerical methods that can be used to get the numerical solution of a boundary value problem, namely the finite-difference method, the shooting method, the collocation method, and others. In this study, the numerical solution of Robin's boundary condition problem was obtained by the center finite-difference and the shooting methods. From the two methods, the numerical error was compared to the exact solution. The simulation results shown that the shooting method produces a better numerical solution for approximating the completion of the Cauchy-Euler differential equation than the finite-difference method since it produced smaller numerical errors.

Keywords: Cauchy-Euler; Finite-difference method; Robin's boundary condition; Shooting method

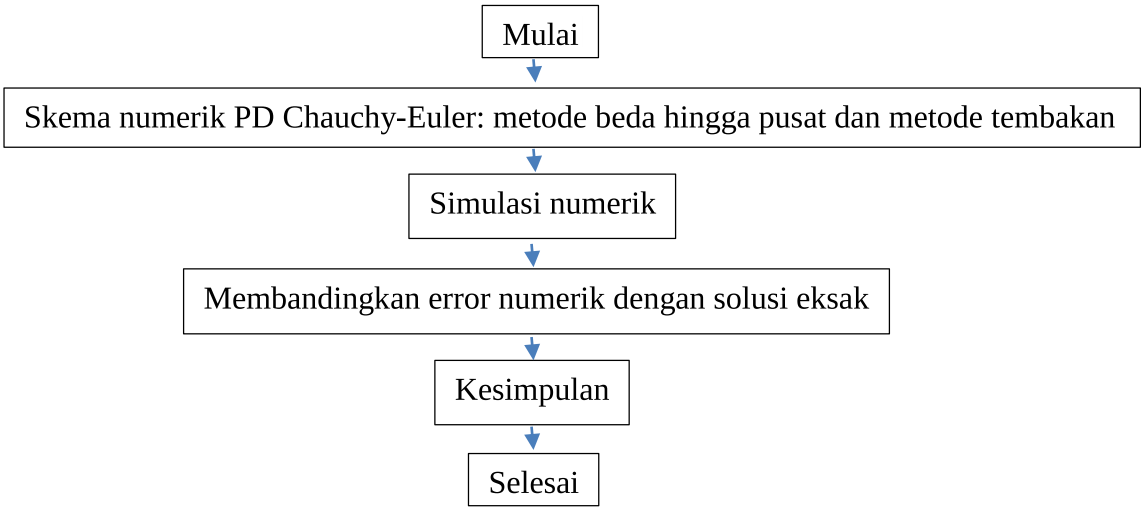
Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara turunan dari satu variabel atau beberapa fungsi tak diketahui yang disebut sebagai variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Suryanto, 2017). Persamaan Chauchy-Euler adalah persamaan yang sederhana untuk persamaan diferensial biasa orde tinggi dengan koefisien tidak konstan. Sabuwala & De Leon, (2011) telah menyelesaikan beberapa persamaan Chauchy-Euler non-homogen secara eksak dengan menentukan penyelesaian partikular. Solusi khusus ditentukan dengan metode variasi parameter atau mengubah persamaan menjadi persamaan koefisien konstan dan metode koefisien tak tentu. Pada kasus tertentu persamaan diferensial Chauchy-Euler non-homogen tidak mudah untuk dicari solusi eksaknya. Metode numerik adalah cara lain untuk mendapatkan penyelesaian hampiran dari suatu persamaan diferensial. Ada berbagai macam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaian permalahan tersebut berdasarkan jenis permasalahannya. Untuk masalah nilai awal, metode Euler, Runge-Kutta ataupun prediktor dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial, sedangkan untuk masalah kondisi batas, metode beda hingga, metode tembakan (*shooting*) ataupun metode kolokasi dapat digunakan. Metode beda hingga lebih banyak dipakai dalam menyelesaikan masalah kondisi batas. Akan tetapi metode ini masih memiliki error yang cukup besar dibandingkan metode shooting ataupun metode kolokasi. Amodio & Settanni, (2012) menyelesaikan masalah pertubasi singular menggunakan beda hingga untuk persamaan diferensial orde dua. Opanuga et al., (2017) menyelesaikan masalah kondisi batas menggunakan metode beda hingga untuk mencari solusi numerik dan transformasi Laplace untuk mecari solusi eksaknya. Lodhi & Mishra, (2018) menyelesaikan masalah pertubasi singular menggunakan metode Septic B-sline untuk persamaan diferensial orde dua. Filipov et al., (2019) juga menggunakan metode beda hingga untuk menyelesaikan masalah kondisi batas nonlinear dimana skema beda hingganya diaplikasikan untuk metode *shooting*.

Pada penelitian ini persamaan diferensial Cauchy-Euler akan diselesaikan secara numerik dengan memberikan masalah syarat batas (BVP) Robin menggunakan metode tembakan (*shooting*) dan metode beda hingga dimana solusi eksaknya telah dikerjakan oleh Sabuwala & De Leon, (2011). Kemudian akan dibandingkan error antara kedua metode tersebut terhadap penyelesaian eksaknya sehingga akan dihasilkan metode yang terbaik untuk meyelesaikan persamaan diferensial Cauchy-Euler.

Metode Penelitian

Pada bagian ini akan dijelaskan langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan Chauchy-Euler secara numeric, dapat dilihat pada gambar dibawah ini



Gambar 1. Diagram alir penelitian

Hasil dan Pembahasan

Penyelesaian Numerik

Pada bagian ini akan dijelaskan persamaan Chauchy-Euler dan metode numerik yang digunakan untuk mencari penyelesaian numeriknya.

Persamaan Cauchy-Euler

Persamaan Cauchy-Euler non-homogen order ke-*n* dengan polinomial (derajat *m*) sisi kanan

$$\Sigma_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} = \Sigma_{j=0}^{m} A_j t^i \tag{1}$$

dengan $t > 0$. Persamaan ini dapat diubah menjadi persamaan diferensial dengan koefisien konstan dengan menetapkan $t = e^x$.

Pada artikel ini, persamaan diferensial biasa orde dua yang bernama persamaan Cauchy-Euler yang akan diselesaiakan secara numerik adalah

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 3t\frac{dy}{dt} + 4y = 6t^2 \tag{2}$$

dengan syarat batas Robin $y(1) = 1, y'(4) = 0{,}1 \leqslant t \leqslant 4$, dimana penyelesaian eksaknya adalah

$$y(t) = t^2(Clnt + 3lnt^2) \tag{3}$$

dengan

$C = -\frac{6ln4(ln4+1)}{(1+2ln4)}$.

Skema Numerik dengan Metode Beda Hingga Pusat

Masalah kondisi batas dengan syarat batas Robin dapat di tulis sebagai berikut

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}-3t\frac{dy}{dt}+4y=6t^2 \tag{4}$$

dengan $(1)=1, y'(4)=0{,}1\leqslant t\leqslant 4$. Selanjutnya dengan pendekatan beda pusat untuk turunan pertama dan kedua dari pers. (4) sehingga diperoleh persamaan pertama adalah sebagai berikut:

$$t_i^2\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)-3t_i\left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right)+4y_i=6t_i^2 \tag{5}$$

kemudian persamaan (5) disederhanakan dan dikalikan dengan h^2

$$\left(t_i^2+\frac{3}{2}t_ih\right)y_{i_1}+(-2t_i^2+4h^2)y_i+\left(t_i^2-\frac{3}{2}t_ih\right)y_{i+1}=6t_i^2h^2 \tag{6}$$

dimana pada skema beda hingga pusat berlaku untuk $i=2,\dots,N-2$, sedangkan untuk $i=1$ diperoleh dari nilai awalnya yaitu

$$(-2t_1^2+4h^2)y_1+\left(t_1^2-\frac{3}{2}t_1h\right)y_2=6t_1^2h^2 \tag{7}$$

dan $i=N-1$ diperoleh dari syarat batas Robin $y'(4)=0$ menggunakan skema beda hingga mundur yaitu

$$y'(4)=y'_N=\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=0 \tag{8}$$

sehingga diperoleh

$$y'_N=y_{N-1}. \tag{9}$$

Persamaan (6) dengan $i=2,\dots,N-2$ dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan linier yaitu $Pu=Q$ dimana P adalah matriks tridiagonal berukuran $(N-1)\times(N-1)$,

$$P = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & b_{N-3} & c_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

dengan

$a_i = t_i^2 + \frac{3}{2}t_i h,$

$b_i = -2t_i^2 + 4h^2,$

$c_i = t_i^2 - 3/2, i = 2, \ldots, N-2,$

$a_{N-1} = t_{N-1}^2 + \frac{3}{2}t_{N-1}h,$

$b_{N-1} = 4h^2 - t_{N-1}^2 - \frac{3}{2}t_{N-1}h,$

$$t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 6t_1^2h^2 \\ 6t_2^2h^2 \\ \vdots \\ 6t_{N-2}^2h^2 \\ 6t_{N-1}^2h^2 \end{pmatrix}$$

Skema Numerik dengan Metode *Shooting* (Tembakan)

Masalah kondisi batas dengan syarat batas Robin dapat di tulis sebagai berikut

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 3t\frac{dy}{dt} + 4y = 6t^2 \tag{11}$$

dengan $(1) = 1, y'(4) = 0,1 \leqslant t \leqslant 4$. Dengan metode *shooting*, persamaan (11) dapat ditulis menjadi dua masalah nilai awal dan masalah kondisi batas yaitu

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} - 3t\frac{du}{dt} + 4u = 6t^2, 1 \leqslant t \leqslant 4 \tag{12}$$

$u(1) = 0, u'(1) = 0$, dan

$$t^2\frac{d^2v}{dt^2} - 3t\frac{dv}{dt} + 4u = 0,1 \leqslant t \leqslant 4 \tag{13}$$

$v(1) = 0, u'(1) = 1$. Kombinasi linear persamaan (12) dan (13) yaitu

$$w(t) = u(t) + sv(t), \tag{14}$$

selanjutnya penjumlahan persamaan (12) dan (13) adalah

$$\begin{gathered}(u + sv)'' + +p(t)(u + sv)' + q(t)(u + sv) = r(t), \\ u(1) + sv(1) = 0, u'(1) + sv'(1) = s.\end{gathered} \tag{15}$$

Dengan demikian, fungsi $w(t)$ memenuhi permasalahan kondisi batas

$$\begin{gathered}t^2 \frac{d^2w}{dt^2} - 3t\frac{dw}{dt} + 4w = 6t^2, 1 \leqslant t \leqslant 4 \\ w(1) = 0, w'(1) = s.\end{gathered} \tag{16}$$

Perbedaan antara persamaan (11) dan (16) adalah bahwa pada persamaan (16) diketahui nilai $w^{'}(t)$ di $t = 1$ tetapi nilai $w^{'}(4)$ tidak diketahui. Jika nilai *s* dapat dipilih sedemikian hingga $w^{'}(4) = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa masalah kondisi batas (11) telah terselesaikan.

Agar nilai *s* terpenuhi, persamaan (12) dan (13) diselesaikan terlebih dahulu menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan masalah nilai awal, misalnya menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, sehingga didapatkan nilai $u^{'}(4)$ dan $v^{'}(4)$. Selanjutnya pilih $s = s_0$ dengan syarat $w^{'}(4) = 0$, yaitu

$$w^{'}(4) = u^{'}(4) + s_0 v^{'}(4) = 0, \tag{17}$$

dengan demikian $w(t) = u(t) + s_0 u(t)$ merupakan penyelesaian masalah kondisi batas (11) karena $w(t)$ memenuhi persamaan diferensial dan kondisi batas yang sama. Akibatnya dari persamaan (11) menghasilkan

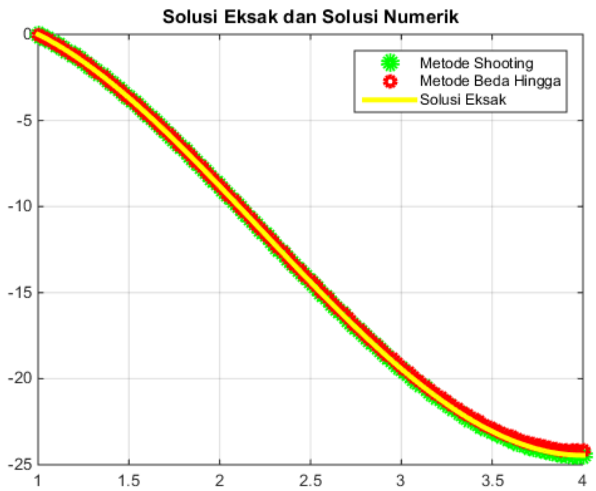
$$s_0 = -\frac{u'(4)}{v'(4)}.$$

Jadi penyelesaian masalah kondisi batas (11) dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan (12) dan (13) dan persamaan (11) dikonstruksi dengan menggunakan persamaan (14) -(16).

Simulasi Numerik

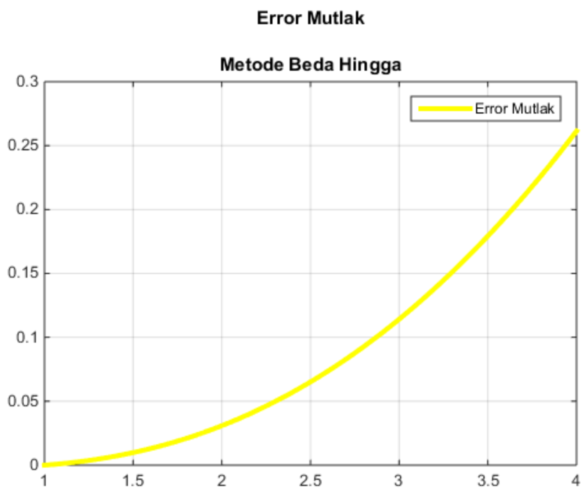
Pada bagian ini akan disimulasikan penyelesaian numerik persamaan Cauchy-Euler dengan menggunakan metode beda hingga pusat dan metode shooting. Pada simulasi ini untuk interval $1 \leqslant t \leqslant 4$ dibagi menjadi subinterval sebanyak $N = 100$ sehingga ukuran tiap langkah $h = \frac{4-1}{100} = 0.03$.

Gambar 2 menunjukkan perbandingan antara solusi eksak dan solusi numerik baik menggunakan metode beda hingga pusat ataupun metode *shooting*. Dari grafik penyelesaian terlihat bahwa metode beda hingga pusat maupun metode shooting cukup baik memberikan penyelesaian hampiran dari persamaan diferensial Cauchy-Euler karena grafik solusi numerik saling berimpit dengan grafik solusi eksak.

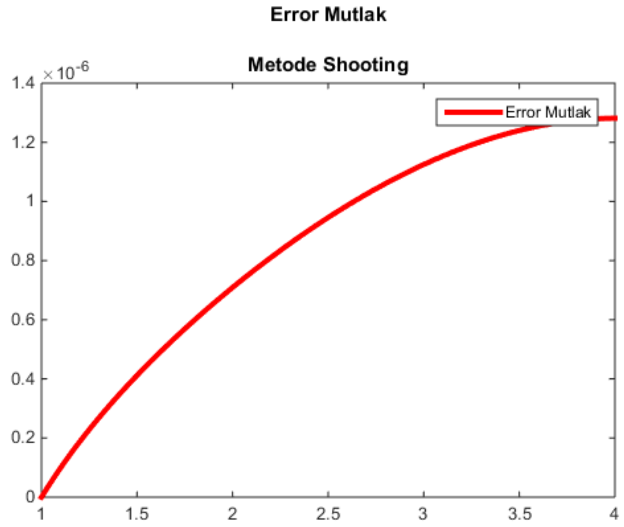


Gambar 2. Plot solusi eksak dan solusi numerik baik menggunakan metode beda hingga ataupun metode *shooting*

Pada gambar selanjutnya akan ditunjukkan grafik error numerik dari kedua metode. Gambar 3 menunjukkan error numerik menggunakan metode beda hingga pusat. Gambar 4 menunjukkan error numerik menggunakan metode *shooting* dan pada Gambar 5 menunjukkan error numerik menggunakan metode beda hingga pusat dan metode *shooting*.



Gambar 3. Profil error numerik menggunakan metode beda hingga pusat



Gambar 4. Profil error numerik menggunakan metode *shooting*

Gambar 5. Profil error numerik menggunakan metode beda hingga pusat dan metode tembakan (*shooting)*

Gambar 5 menunjukkan bahwa errror numerik yang dihasilkan metode tembakan (*shooting)* lebih kecil dibandingkan dengan error numerik yang dihasil dari metode beda hingga pusat.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode tembakan (*shooting)* adalah metode yang cukup baik untuk digunakan dalam mencari penyelesaian numerik dari masalah kondisi batas Robin yang diaplikasikan pada persamaan Chauchy-Euler dibandingkan dengan metode beda hingga pusat.

Simpulan dan Saran

Persamaan diferensial Cauchy-Euler dengan syarat batas Robin telah diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga pusat dan tembakan (*shooting)*. Hasil simulasi numerik menunjukkann bahwa metode tembakan (*shooting)* adalah metode yang cukup baik untuk digunakan dalam mencari penyelesaian numerik dari masalah kondisi batas Robin yang diaplikasikan pada persamaan Chauchy-Euler dibandingkan dengan metode beda hingga pusat karena metode tembakan (*shooting)* menghasilkan kesalahan numerik yang lebih kecil.

Referensi

Amodio, P., & Settanni, G. (2012). A finite differences MATLAB code for the numerical solution of second order singular perturbation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.04.011

Filipov, S. M., Gospodinov, I. D., & Faragó, I. (2019). Replacing the finite difference methods for nonlinear two-point boundary value problems by successive application of the linear shooting method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.03.004

Lodhi, R. K., & Mishra, H. K. (2018). Septic B-spline method for second order self-adjoint singularly perturbed boundary-value problems. *Ain Shams Engineering Journal*. https://doi.org/10.1016/j.asej.2016.09.016

Opanuga, A. A., Owoloko, E. A., Okagbue, H. I., & Agboola, O. O. (2017). Finite difference method and laplace transform for boundary value problems. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*.

Sabuwala, A. H., & De Leon, D. (2011). Particular solution to the Euler-Cauchy equation with polynomial non-homogeneities. *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A*. https://doi.org/10.3934/proc.2011.2011.1271

Suryanto, A. (2017). *METODE NUMERIK UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA dan Aplikasinya dengan MATLAB*.