SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL RICCATI MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE DAN ANALISIS KEKONVERGENANNYA

Hasna Muti Andini[1], Eddy Djauhari[2], Muhamad Deni Johansyah[3]
[1,2,3]Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung-Sumedang KM 21 Sumedang, 45363
[1]mutiannn@gmail.com

Abstrak

Banyak fenomena-fenomena di kehidupan nyata dapat diinterpretasikan ke dalam model matematika yang diformulasikan secara matematis dan membentuk suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial biasa pada umumnya mempunyai orde bilangan bulat. Persamaan diferensial yang berorde pecahan disebut persamaan diferensial fraksional. Salah satu persamaan yang sering digunakan dalam kehidupan nyata yaitu persamaan diferensial Riccati. Pada penelitian ini, penulis akan mencari solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace dan analisis kekonvergenannya. Metode ini mengombinasikan antara transformasi Laplace dan dekomposisi Adomian. Sehingga, akan didapat kesimpulan bahwa barisan orde dari sebuah persamaan diferensial fraksional Riccati yang konvergen ke suatu bilangan akan mengakibatkan barisan fungsi solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati tersebut konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati dengan ordenya adalah bilangan itu sendiri.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Fraksional; Persamaan Diferensial Riccati; Metode Dekomposisi Adomian Laplace; Kekonvergenan.

Abstract

Many phenomena in real life could be interpreted into mathematical models that were mathematically formulated and formed a differential equation. In general, ordinary differential equations had integer order. Differential equations that had a fractional-order were called fractional differential equations. One equation that was often used in real life was the Riccati differential equation. In this research, the author would find out the solution of the Riccati fractional differential equation used the Laplace Adomian Decomposition method and convergence analysis. This method combined the Laplace transformation and Adomian Decomposition. So, there would be a conclusion that the order of a Riccati fractional differential equation that was converged to a number would result the row of solution functions of the Riccati fractional differential equation that was converged to the solution function of Riccati fractional differential equation was the number itself.

Keywords: Fractional Differential Equations; Riccati Differential Equations; Laplace Adomian Decomposition Method; Convergence.

Pendahuluan

Banyak fenomena-fenomena di kehidupan nyata seperti hukum redaman reologi, proses difusi, dan sebagainya dapat diinterpretasikan ke dalam model matematika. Model tersebut diformulasikan secara matematis dan membentuk suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan atau diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih varibel bebas. Apabila persamaan tersebut hanya memuat satu variabel bebas, maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa. Sedangkan persamaan yang memuat lebih dari satu variabel bebas, dinamakan persamaan diferensial parsial. Selain ditinjau dari variabelnya, persamaan diferensial juga dapat ditinjau dari tingkat atau ordenya, yaitu pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dari persamaan diferensial tersebut. Persamaan diferensial dengan orde pecahan dinamakan persamaan diferensial fraksional.

Salah satu jenis persamaan diferensial adalah persamaan diferensial Riccati. Persamaan diferensial Riccati merupakan representasi matematis yang berasal dari persoalan-persoalan teknik, rekayasa dan sains terapan, seperti pemrosesan *random*, difusi, stokastik, sintesa jaringan dan matematika finansial. Persamaan diferensial Riccati merupakan persamaan diferensial nonlinear dengan bentuk persamaan yang cukup kompleks, sehingga beberapa teknik analitik tidak dapat menyelesaikan persoalan ini (Wartono & Muhaijir, 2013). Beberapa metode yang pernah digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial Riccati antara lain metode Dekomposisi Adomian, Iterasi Variasi, Transformasi Diferensial, Pertubasi Homotopy, dan lain-lain.

Pada penelitian ini akan dibahas penerapan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan solusi persamaan diferensial fraksional Riccati. Metode Dekomposisi Adomian Laplace merupakan metode yang mengkombinasikan antara metode Dekomposisi Adomian dengan Transformasi Laplace. Menurut beberapa peneliti, metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear maupun nonlinear. Syam dan Hamdan (2006) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Bratu. Yusufoglu (2006) menggunakan algoritma Dekomposisi Laplace untuk menyelesaikan persamaan Duffing. Selanjutnya, Kiymas (2009) juga melakukan kombinasi antara metode Dekomposisi Adomian dan Transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinear orde dua dengan koefisien variabel (Khan et al., 2013).

Setelah fungsi solusi didapatkan, pada penelitian ini juga akan dianalisis kekonvergenan barisan dari fungsi solusinya.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode dekomposisi Adomian Laplace. Metode ini menggabungkan metode dekomposisi Adomian dan transformasi Laplace. Adapun beberapa konsep dasar dan landasan teori yang berhubungan dengan penelitian ini yaitu fungsi gamma, turunan fungsi, integral dan turunan fraksional, persamaan diferensial, transformasi Laplace, metode dekomposisi Adomian, serta kekonvergenan barisan.

Definisi 1 (Boas, 2006). Untuk setiap $\alpha > 0$, didefinisikan fungsi Gamma sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Fungsi Gamma mempunyai sifat-sifat sebagai berikut (Boas, 2006):

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ dengan $\alpha > 0$
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ dengan $\alpha \in \mathbb{N}$

Definisi 2 (Martono, 1999). Misalkan fungsi f yang terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Limit fungsi f di c adalah L (ditulis $\lim_{x\to c} f(x) = L$, atau $f(x) \to L$ bila $x \to c$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x-c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi dari limit tersebut kemudian digunakan untuk mencari turunan dari suatu fungsi. Adapun definisi dari turunan dijelaskan sebagai berikut:

Definisi 3 (Martono, 1999). Misalkan fungsi f yang terdefinisi pada suatu interval buka I yang memuat titik c. Turunan pertama dari fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

bila limit ini ada.

Definisi 4 Misalkan α bilangan real positif, integral fraksional orde α dari fungsi $f(x)$ adalah

$$J^\alpha f(x) = D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt.$$

Teorema 5 (Kimeu, 2009). Integral fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk $f(x) = x^m$ adalah

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}x^{m+\alpha}$$

untuk $\alpha > 0, m > -1, x > 0$.

Definisi 6 Turunan fraksional Riemann-Lioville didefinisikan sebagai

$$D_{x_0}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}[J^{n-\alpha}f(x)],$$

$$D_{x_0}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\int_{x_0}^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt\right]$$

dengan α orde sembarang, $n-1 \le \alpha < n,\ n \in Z^+$, x_0 batas bawah, $x_0 < x,\ x > 0$, dan D^α operator turunan fraksional berorde α.

Definisi 7 (Marwan & Munzir, 2009). Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan atau diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas dinamakan persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial yang mempunyai orde pecahan disebut persamaan diferensial fraksional.

Definisi 8 (Schiff, 1999). Misalkan $f(t)$ adalah fungsi bernilai real atau kompleks dari variabel $t > 0$ dan s adalah parameter bernilai real atau kompleks. Kita definisikan transformasi Laplace dari $f(t)$ sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$$

jika limitnya ada.

Definisi 9 (Schiff, 1999). Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$ yaitu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut suatu invers transformasi laplace dari $F(s)$ dan secara simbolik ditulis

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

dengan $t > 0$ dan $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers transformasi Laplace.

Selanjutnya, persamaan yang diberikan pada metode dekomposisi adomian dalam persamaan operator adalah sebagai berikut:

$$Ly + Ry + Ny = g(x) \tag{2.1}$$

dimana L adalah operator linear yang dapat diinverskan, R operator nonlinear, dan N bagian linear yang tersisa. Persamaan (2.1) dapat ditulis menjadi:

$$Ly = g(x) - Ry - Ny$$

dengan $L = \frac{d^n}{dx^n}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa invers operator L^{-1} ada, dan L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x.

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny$$

$$y - \Phi = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny$$

sehingga,

$$y = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny$$

dengan Φ adalah konstanta integral dan memenuhi $L\Phi = 0$.

Kemudian Adomian mendefinisikan penyelesaian y yang merupakan deret tak hingga yaitu:

$$y = y_0 + y_1\lambda + y_2\lambda^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n$$

Sedangkan suku nonlinear Ny dinyatakan dalam suatu polinomial khusus sebagai berikut:

$$Ny = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n.$$

Maka diperoleh

$$A_0 = Ny_0$$

$$A_1 = y_1 N' y_0$$

$$A_2 = y_2 N' y_0 + \frac{{y_1}^2}{2!} N'' y_0$$

$$A_3 = y_3 N' y_0 + y_1 y_2 N'' y_0 + \frac{{y_1}^3}{3!} N''' y_0$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$y = y_0 + y_n$$

$$y_0 = \Phi + L^{-1} g$$

$$y_n = -L^{-1} R y_{n-1} - L^{-1} A_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Definisi 10 (Bartle, R. G., Sherbert, 2011). Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real. (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$, sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain, (x_n) dikatakan konvergen ke x di $\mathbb{R}$ jika $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definisi 11 (Bartle, R. G., Sherbert, 2011). Misal (f_n) merupakan barisan fungsi pada $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, $A_0 \subseteq A$, dan $f: A_0 \to \mathbb{R}$. Barisan (f_n) konvergen ke f di A_0 jika untuk setiap $x \in A_0$, $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ di $\mathbb{R}$. Pada kasus ini, kita sebut f adalah limit dari barisan (f_n) di A_0. Ketika fungsi f ada, kita sebut bahwa barisan (f_n) konvergen di A_0 atau bahwa (f_n) konvergen titik demi titik di A_0.

Hasil dan Pembahasan

Persamaan diferensial yang dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial fraksional Riccati dengan bentuk umum sebagai berikut

$$D^{\alpha}y(t) = P(t) + Q(t)y + R(t)y^2, \qquad t > 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.1}$$

dan kondisi awal

$$y(0) = k$$

dimana $P(t), Q(t)$, dan $R(t)$ adalah fungsi yang diberikan, α adalah orde dari turunan fraksional, dan k adalah nilai kondisi awal.

Kemudian, dengan menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas, persamaan (3.1) menjadi

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}y\} = \mathcal{L}\{P(t)\} + \mathcal{L}\{Q(t)y\} + \mathcal{L}\{R(t)y^2\}. \tag{3.2}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat transformasi Laplace, persamaan (3.2) menjadi

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{y\} - s^{\alpha-1}\mathcal{L}\{y(0)\} = \mathcal{L}\{P(t)\} + \mathcal{L}\{Q(t)y\} + \mathcal{L}\{R(t)y^2\}. \tag{3.3}$$

Setelah itu, dengan menyubstitusikan nilai kondisi awal, persamaan (3.3) menjadi

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{y\} - s^{\alpha-1}k = \mathcal{L}\{P(t)\} + \mathcal{L}\{Q(t)y\} + \mathcal{L}\{R(t)y^2\}. \tag{3.4}$$

Dengan demikian, persamaan (3.4) dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{k}{s} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{P(t)\} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{Q(t)y\} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{R(t)y^2\}. \tag{3.5}$$

Kemudian Adomian mendefinisikan solusi pendekatan $y(t)$ yang dinyatakan dalam jumlah deret tak hingga yaitu

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \tag{3.6}$$

dan suku nonlinear $R(t)$ yang dinyatakan dalam suatu polinomial khusus sebagai berikut

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{3.7}$$

dimana komponen A_n merupakan polinomial Adomian khusus dengan rumus sebagai berikut

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$

untuk $n = 0,1,2,3, \ldots$.

Selanjutnya, persamaan (3.6) dan persamaan (3.7) disubstitusikan ke persamaan (3.5), sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{k}{s} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{P(t)\} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\left\{Q(t)\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} + \frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\left\{R(t)\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\}. \tag{3.8}$$

Sehingga, dengan menerapkan invers transformasi Laplace diperoleh

$$y_0 = k + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\{P(t)\}\right\} \tag{3.9}$$

$$y_{n+1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(t)}{s^\alpha}\mathcal{L}\{y_n\}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(t)}{s^\alpha}\mathcal{L}\{A_n\}\right\}, \quad n \geq 0. \tag{3.10}$$

Persamaan Diferensial Riccati berorde α

Diberikan persamaan diferensial fraksional Riccati berorde α dengan bentuk khusus sebagai berikut

$$D^\alpha y(t) = t^m - y - y^2, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.11}$$

dan kondisi awal

$$y(0) = 0.$$

Pada penelitian ini, akan dicari solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati berorde α menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace sebagai berikut:
Nilai y_0 dari persamaan (3.11) dengan menggunakan rumus dari persamaan (3.9) yaitu

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\{t^m\}\right\}, \tag{3.12}$$

dan nilai y_{n+1} dari persamaan (3.11) dengan menggunakan rumus dari persamaan (3.10) yaitu

$$y_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\{y_n\}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\{A_n\}\right\}, \qquad n \geq 0 \tag{3.13}$$

dimana A_n adalah polinomial Adomian dari operator nonlinear $f(y) = y^2$.

Dengan demikian, bentuk umum solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (3.11) adalah

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$$

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}t^{m+\alpha} - \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+2\alpha+1)}t^{m+2\alpha} \\ & - \frac{\Gamma^2(m+1)\Gamma(2m+2\alpha+1)}{\Gamma^2(m+\alpha+1)\Gamma(2m+3\alpha+1)}t^{2m+3\alpha} + \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3\alpha+1)}t^{m+3\alpha} \\ & + \frac{\Gamma^2(m+1)\Gamma(2m+2\alpha+1)}{\Gamma^2(m+\alpha+1)\Gamma(2m+4\alpha+1)}t^{2m+4\alpha} \\ & + \frac{2\Gamma^2(m+1)\Gamma(2m+3\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+2\alpha+1)\Gamma(2m+4\alpha+1)}t^{2m+4\alpha} \\ & + \frac{2\Gamma^3(m+1)\Gamma(2m+2\alpha+1)\Gamma(3m+4\alpha+1)}{\Gamma^3(m+\alpha+1)\Gamma(2m+3\alpha+1)\Gamma(3m+5\alpha+1)}t^{3m+5\alpha} - \cdots. \end{aligned}$$

Persamaan Diferensial Riccati berorde α dengan $P(t) = t$

Diberikan persamaan diferensial fraksional Riccati berorde α dengan bentuk khusus sebagai berikut

$$D^{\alpha}y(t) = t - y - y^2, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.14}$$

dan kondisi awal

$$y(0) = 0.$$

Pada penelitian ini, akan dicari solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati berorde α menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace sebagai berikut:
Nilai y_0 dari persamaan (3.14) dengan menggunakan rumus dari persamaan (3.9) yaitu

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{t\}\right\}, \tag{3.15}$$

dan nilai y_0 dari persamaan (3.14) dengan menggunakan rumus dari persamaan (3.10) yaitu

$$y_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{y_n\}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}\{A_n\}\right\}, \qquad n \geq 0 \tag{3.16}$$

dimana A_n adalah polinomial Adomian dari operator nonlinear $f(y) = y^2$.

Dengan demikian, bentuk umum solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (3.14) adalah

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + y_1 + y_2 + \cdots \\ y(t) &= \frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}t^{1+\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2+2\alpha)}t^{1+2\alpha} - \frac{\Gamma(3+2\alpha)}{\Gamma^2(2+\alpha)\Gamma(3+3\alpha)}t^{2+3\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(2+3\alpha)}t^{1+3\alpha} + \frac{\Gamma(3+2\alpha)}{\Gamma^2(2+\alpha)\Gamma(3+4\alpha)}t^{2+4\alpha} \\ &\quad + \frac{2\Gamma(3+3\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(2+2\alpha)\Gamma(3+4\alpha)}t^{2+4\alpha} \\ &\quad + \frac{2\Gamma(3+2\alpha)\Gamma(4+4\alpha)}{\Gamma^3(2+\alpha)\Gamma(3+3\alpha)\Gamma(4+5\alpha)}t^{3+5\alpha} - \cdots. \end{aligned}$$

Kekonvergenan Barisan Fungsi Solusi PDFR dengan $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$

Pada bagian ini, akan diperlihatkan bahwa barisan dari fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati (4.14) berorde $0 < \alpha_n \leq 1$ dengan (α_n) konvergen ke α, konvergen ke fungsi solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati berorde $0 < \alpha \leq 1$. Pilih barisan $(\alpha_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ dengan (α_n) konvergen ke $\alpha = 1$.

Untuk $n = 1$, akan diperoleh $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Jadi, solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (4.12) dengan $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ adalah

$$\begin{aligned} y_{\alpha=1}(t) \;&=\; \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{512}{315\,\pi^{\frac{3}{2}}}t^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{9\pi}t^4 + \frac{35}{\Gamma 96}t^4 \\ &\quad + \frac{2.097.152}{654.885\,\pi^2}\,t^{\frac{11}{2}} - \cdots. \end{aligned}$$

Untuk $n = 2$, akan diperoleh $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. Jadi, solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (4.12) dengan $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ adalah

$$y_{\alpha=\frac{2}{3}}(t) \;=\; y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$$

$$\begin{aligned} y_{\alpha=\frac{2}{3}}(t) \;&=\; \frac{9}{10\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}t^{\frac{5}{3}} - \frac{27\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{56\,\pi}t^{\frac{7}{3}} - \frac{7\,\pi\sqrt{3}}{90\,\Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)}t^4 \\ &\quad + \frac{1}{6}t^3 + \frac{81\,\pi\,\sqrt{3}}{2.200\,\Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right)}t^{\frac{14}{3}} + \frac{177.147\,\sqrt{3}}{431.200\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\pi}t^{\frac{14}{3}} \\ &\quad + \frac{11.781}{98.800\,\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)}t^{\frac{19}{3}} - \cdots. \end{aligned}$$

Untuk $n = 3$, akan diperoleh $\alpha_3 = \frac{3}{4}$. Jadi, solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (4.12) dengan $\alpha_3 = \frac{3}{4}$ adalah

$$y_{\alpha=\frac{3}{4}}(t) \;=\; y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$$

$$\begin{aligned} y_{\alpha=\frac{3}{4}}(t) \;&=\; \frac{16}{21\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}t^{\frac{7}{4}} - \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} - \frac{8.192\sqrt{2}}{41.769\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}t^{\frac{17}{4}} \\ &\quad + \frac{128\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{585\pi}t^{\frac{13}{4}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{63\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}t^5 + \frac{221\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{3360\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}t^5 \\ &\quad + \frac{68.719.476.736\sqrt{2}}{796.910.040.927\sqrt{\pi}\Gamma^3\left(\frac{3}{4}\right)}t^{\frac{27}{4}} - \cdots. \end{aligned}$$

Karena barisan $(\alpha_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ konvergen ke $\alpha = 1$, maka akan dicari solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (4.12) dengan $\alpha = 1$. Jadi, solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional (4.12) dengan $\alpha = 1$ adalah

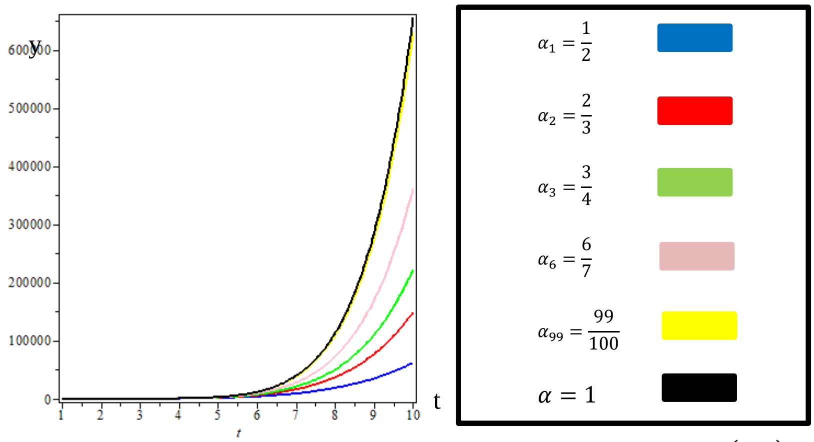
$$y_{\alpha=1}(t) \ = \ y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$$

$$y_{\alpha=1}(t) \ = \ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{13}{360}t^6 + \frac{1}{160}t^8 - \cdots.$$

Karena $\lim_{n\to\infty}\left(y_n(t)\right) = y_{\alpha=1}(t)$, dapat disimpulkan bahwa barisan fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati $D^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}y(t) = t + y - y^2$ berode $0 < \frac{n}{n+1} \leq 1$ dengan (α_n) konvergen ke $\alpha = 1$, akan konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati dengan bentuk $D^{(1)}y(t) = t + y - y^2$.

Kemudian, solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati dengan bentuk $D^{\alpha}y(t) = t + y - y^2$ dimana $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ dengan $\alpha_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$ dan $\alpha = 1$ digambarkan ke dalam bentuk grafik dengan menggunakan *software* Maple.

Jika diambil tiga suku yaitu y_0, y_1, dan y_2 maka akan diperoleh pola grafik sebagai berikut



Gambar 1 Grafik Fungsi Solusi PDFR (4.12) untuk $\alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)$

Dari gambar 1 dapat dilihat bahwa barisan dari fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati dengan bentuk $D^{\left(\frac{n}{n+1}\right)}y(t) = t + y - y^2$ konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati dengan bentuk $D^{(1)}y(t) = t + y - y^2$.

Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat disimpulkan bahwa solusi pendekatan persamaan diferensial fraksional Riccati dapat dicari dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace. Metode ini mengombinasikan metode dekomposisi Adomian dengan transformasi Laplace. Selain itu, barisan dari fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati berorde (α_n) akan konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial fraksional Riccati berorde α jika barisan orde fraksional (α_n) konvergen ke α.

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian ini, penulis mempunyai beberapa saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya yaitu Menganalisis kekonvergenan barisan dari fungsi solusi pada persamaan diferensial fraksional Riccati dengan *P(t)* merupakan fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan sebagainya serta mencari solusi persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan metode lainnya.

Referensi

Bartle, R. G., Sherbert, D. R. (2011). *[Robert_G._Bartle,_Donald_R._Sherbert]_Introductio(BookFi.org)*.

Boas, M. L. (2006). Mathematical methods in physical sciences. *Journal of Symbolic Logic*. https://doi.org/10.2307/2275199

Khan, N. A., Ara, A., & Khan, N. A. (2013). Fractional-order Riccati differential equation: Analytical approximation and numerical results. *Advances in Difference Equations*, *2013*(May 2014). https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-185

Kimeu, J. M. (2009). Fractional calculus: Theory and applications [Western Kentucky University]. In *Mathematics*. https://doi.org/10.3390/math6090145

Martono, K. (1999). *Kalkulus*. Erlangga.

Marwan, & Munzir, S. (2009). *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu.

Schiff, J. L. (1999). The Laplace transform: theory and applications. *Choice Reviews Online*, *38*(01), 38-0348-38–0348. https://doi.org/10.5860/choice.38-0348

Wartono, & Muhaijir, M. N. (2013). *Penyelesaian persamaan riccati dengan menggunakan metode dekomposisi adomian laplace*. *10*(2).