SOLUSI MODEL *NAVIER STOKES KORTEWEG* DENGAN SYARAT BATAS *SLIP* DI *HALF-SPACE* BERDIMENSI 3

Anisa Salsabila[1], Suma Inna[2], Muhaza Liebenlito[3], Rahmi Purnomowati[4]
[1,2,3,4] UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Jl. Ir. H. Juanda No. 95
Tangerang Selatan, Indonesia
[1] anisasalsabila0527@gmail.com

Abstrak

Model *Navier Stokes Kortewege* merupakan model yang mendeskripsikan aliran fluida termampatkan dengan mempertimbangkan konstanta kapilaritas (κ) yang dikenal sebagai konstanta kapiler. Adapun penelitian ini bertujuan untuk membuktikan keberadaan operator solusi sistem persamaan resolvent model *Navier Stokes Kortewege* dengan syarat batas *slip* di *half-space* berdimensi 3 $(\mathbf{R}^3_+)$ khususnya pada kasus koefisien $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0$ dan $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0$, $\kappa \neq \mu v$. Dalam mencari operator solusi sistem persamaan resolvent tersebut dilakukan beberapa langkah, seperti melakukan reduksi terhadap sistem persamaan resolvent tak homogen, kemudian dilakukan transformasi Fourier parsial terhadap sistem persamaan resolvent homogen untuk memperoleh persamaan diferensial biasa yang lebih sederhana. Sehingga, diperoleh operator solusi $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2)$.

Kata Kunci: *Navier Stokes Korteweg*; Sistem persamaan resolvent; Operator solusi; Transformasi Fourier parsial

Abstract

The Navier Stokes Korteweg model is a model that describes compressible fluid flow by considering the stress tensor with a capillarity constant (κ) *known as the capillary constant. This research aims to prove the existence of solution operators for the resolvent equation system of a Navier Stokes Kortewege model with slip boundary conditions in 3 dimensional half-space* $(\boldsymbol{R}^3_+)$*, specifically in the coefficient cases where* $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0$ *and* $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0$, $\kappa \neq \mu v$. *In searching to find solution operator several steps are taken, such as reducing the system of inhomogeneous resolvent equations, then the partial Fourier transform is performed on the system of homogeneous resolvent equations to obtain a simpler ordinary differential equation. So that, the solution operator is obtained* $(\rho, \boldsymbol{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \boldsymbol{F}^2, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \boldsymbol{F}^2)$.

Keywords: *Navier Stokes Korteweg; The system of resolvent equations; Solution operator; Partial Fourier transform.*

Pendahuluan

Fluida mencakup zat cair dan gas yang akan terus menerus berubah bentuk (deformasi) sehingga sifatnya tidak permanen. Berdasarkan kerapatannya menurut (Fox dkk., 2011) fluida dibagi menjadi dua, yaitu fluid termampatkan (*compressible fluid*) dan fluida tak termampatkan (*incompressible fluid*). Fluida termampatkan merupakan fluida yang kerapatannya berubah-ubah, sehingga jika menerima tekanan kerapatannya akan meningkat, dan akan menurun jika mengalami panambahan luas penampang (ekspansi), contohnya berupa zat gas. Sedangkan fluida tak termampatkan merupakan fluida yang mengalami perubahan kerapatan yang sangat kecil apabila menerima tekanan sehingga dapat diabaikan (kerapatan tidak berubah), contohnya berupa zat cair.

Model *Navier Stokes Korteweg* merupakan pengembangan dari model *Navier-Stokes*, secara umum model ini digunakan untuk menggambarkan efek kapilaritas fluida termampatkan, dengan mempertimbangkan konstanta kapilaritas (κ) yang dikenal sebagai konstanta kapiler.

Penelitian terkait penyelesaian model *Navier Stokes Korteweg* telah disempurnakan dalam berbagai skenario oleh beberapa peneliti, diantaranya penelitian oleh (Liu dkk., 2015) yang menganalisis efek kapilaritas fluida dan mempelajari fase transisi dari zat gas ke zat cair pada model *Navier Stokes Korteweg*. Berikutnya, penelitian oleh (Danchin & Desjardins, 2001) membuktikan keberadaan dan keunikan hasil smooth solution yang sesuai untuk model isotermal fluida termampatkan kapiler yang dapat digunakan sebagai fase model transisi. Sejalan dengan itu, penelitian oleh (H. Hattori & Li, 1994) membuktikan terkait adanya solusi tunggal kuat dengan data awal yang membutuhkan *regularity* lebih tinggi dibandingkan Danchin dan Desjardins, sistem ini adalah versi isotermal yang disederhanakan, penelitian juga dilakukan oleh (H. H. Hattori & Li, 1996) untuk membuktikan keberadaan solusi global untuk sistem *Navier stokes Korteweg* berdimensi tinggi ketika ditetapkan data awal kecil.

Pembuktian keberadaan solusi lemah global (*global weak solution*) dilakukan (Haspot, 2009) untuk model isotermal umum cairan kapiler yang dapat digunakan sebagai fase model transisi, Haspot juga meningkatkan hasil Danchin dan Desjardins dengan menunjukkan keberadaan solusi lemah global (*global weak solution*) dalam dimensi satu untuk jenis koefisien kapiler tertentu, dengan data awal yang besar dalam ruang energi. Berikutnya, penelitian oleh (Kotschote, 2008) berusaha membuktikan keberadaan dan keunikan solusi kuat lokal (*strong local solution*) untuk model isotermal fluida termampatkan kapiler.

Penelitian juga dilakukan oleh (Suma'inna, 2018) untuk membuktikan keberadaan $\mathcal{R}$-*bounded* operator solusi persamaan pelat termoelastik dengan syarat batas Dirichlet pada domain Ω. Kemudian, penelitian dilakukan kembali oleh (Inna & Saito, 2023) untuk membuktikan bahwa solusi kuat lokal (*local strong solution*) dapat ditemukan dalam kerangka L_p terhadap waktu dan L_q terhadap ruang, dengan $p \in (1, \infty)$ dan $q \in (N, \infty)$ dengan mempertimbangkan tingkat regularitas tambahan dari densitas awal, yang bergantung pada tingkat regularitas maksimal sistem linier. Serta penelitian oleh (Saito, 2019) yang membuktikan adanya keluarga operator solusi terbatas$-\mathcal{R}$ dari model *Navier Stokes Korteweg* dengan syarat batas $\mathbf{n} \cdot \nabla\rho = g$ dan $\mathbf{u} = 0$ di *half-space* $(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})$.

Untuk sebarang koefisien μ, v dan κ, terdapat lima kondisi akar persamaan karakterikstik yang dianalisis dalam menyelesaikan model *Navier Stokes Korteweg* yaitu:

$$\text{Kasus I: } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0;$$

$$\text{Kasus II: } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0,\ \kappa \neq \mu v;$$

$$\text{Kasus III: } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0,\ \kappa = \mu v;$$

$$\text{Kasus IV: } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} = 0,\ \kappa \neq \mu v;$$

$$\text{Kasus V: } \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} = 0,\ \kappa = \mu v.$$

Selanjutnya, penelitian kembali dilakukan oleh (Inna dkk., 2020) untuk membahas model persamaan fluida termampatkan *Navier Stokes Korteweg* dengan syarat batas *slip* di *half-space* $(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})$ untuk kasus koefisien (I) dan (II). Selain itu, (Inna dkk., 2023) juga membahas model tersebut untuk kasus koefisien (III), kemudian (Inna) menganalisa lebih lanjut keberadaan estimasi operator solusi ($\mathcal{R}$-*bounded*) pada model yang sama untuk keseluruhan kasus koefisien. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk menganalisis model pada domain terbatas di *half-space* berdimensi 3 $(\mathbf{R}_+^3)$ untuk kasus koefisien (I) dan (II), sehingga persamaan resolvent pada penelitian ini dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\left.\begin{array}{lr}
\lambda\rho + \left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}u_j\right) = d & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda u_1 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)u_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}u_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = f_1 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda u_2 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)u_2 - v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}u_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = f_2 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda u_3 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)u_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}u_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = f_3 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\rho = g & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}u_3 = h_1 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_3}u_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_3 = h_2 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
u_3 = h_3 & pada\ \mathbf{R}_0^3
\end{array}\right\} \quad (1)$$

dengan

$$\mathbf{R}_0^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_3 > 0\},$$
$$\mathbf{R}_+^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_3 > 0\},$$

di mana λ merupakan parameter resolvent yang terdapat pada $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} | \Re_z > 0\}$, dengan $\mathbf{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. $\rho = \rho(x)$ dan $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_2(x))^\intercal$ merupakan fungsi yang tidak diketahui, dengan masing-masing merupakan massa jenis yang bernilai skalar dan kecepatan fluida yang bernilai vektor dan bergantung pada variabel $x = (x_1, x_2, x_3)$. Koefisien μ dan v digunakan untuk menyatakan konstanta viskositas, sedangkan κ menyatakan konstanta kapilaritas. Selanjutnya $(0,0,-1)^\intercal \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = g$, $\frac{\partial}{\partial x_{3,}}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}u_3 = h_1$, $\frac{\partial}{\partial x_3}u_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_3 = h_2$ dan $u_3 = h_3$ merupakan syarat batas *slip*, dengan $(0,0,-1)^\intercal$ adalah vektor satuan ke arah luar terhadap $\mathbf{R}_0^3$.

Metode Penelitian

Terlebih dahulu, akan diperkenalkan beberapa notasi khusus yang digunakan dalam penelitian ini untuk menyatakan hasil utama. Misalkan $\mathbf{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli dan $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, serta $\mathbf{C}$ dan $\mathbf{R}$ masing-masing menyatakan himpunan bilangan kompleks dan himpunan bilangan real. Misalkan pula untuk sebarang domain $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$, definisi ruang Lebesgue dan ruang Sobolev dapat dinotasikan sebagai $L_q(\Omega)$ dan $W_q^m(\Omega)$, dengan $m \in \mathbf{N}$ dan $q \in [1, \infty)$. Kemudian, norma dari ruang Sobolev $W_q^n(\Omega)$ dimana $n \in \mathbf{N}_0$ dinotasikan sebagai $\|\cdot\|_{W_q^n(\Omega)}$.

Misalkan X dan Y adalah ruang Banach, maka X^d, dengan $d \in \mathbf{N}$ merupakan perkalian ruang sebanyak d, di mana $X^d = \{x_i = (x_1, \dots, x_d) | x_i \in X\}$. Selanjutnya, panjang vektor ruang X^d dinotasikan sebagai $\|\cdot\|_{X^d}$. Himpunan operator linier yang memetakan X ke Y dinotasikan sebagai $\mathcal{L}(X, Y)$, dan notasi $\mathcal{L}(X, X)$ dapat ditulis sebagai $\mathcal{L}(X)$. Kemudian, untuk domain $U \subseteq \mathbf{C}$, $\mathbf{Hol}(U, \mathcal{L}(X, Y))$ merupakan himpunan fungsi holomorfik yang memetakan U ke $\mathcal{L}(X, Y)$. Selanjutnya, jika $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\intercal$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\intercal$ adalah vektor berdimensi 3, maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j.$$

Dalam mencari operator solusi sistem persamaan (1) terlebih dahulu dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan solusi ketika di $\mathbf{R}^3$,di mana sistem persamaan di $\mathbf{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\left.\begin{array}{lr}
\lambda \rho + \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} u_j \right) = d & di\ \mathbf{R}^3 \\
\lambda u_1 - \mu \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) u_1 - v \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) \rho = f_1 & di\ \mathbf{R}^3 \\
\lambda u_2 - \mu \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) u_2 - v \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) \rho = f_2 & di\ \mathbf{R}^3 \\
\lambda u_3 - \mu \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) u_3 - v \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_j}} u_j \right) - \kappa \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2} \right) \rho = f_3 & di\ \mathbf{R}^3
\end{array}\right\} \quad (2)$$

dengan $\mathbf{R}^3 = \{x | x = (x_1, x_2, x_3)\}$.

Misalkan ruang untuk fungsi pada ruas kanan sistem persamaan (2) di $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{F}^1 = (d, f_1, f_2, f_3)$, didefinisikan sebagai berikut,

$$X_q^1(\mathbf{R}^3) = W_q^1(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3) \times L_q(\mathbf{R}^3)$$

kemudian, $\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1$ dan $\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1 = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} d \\ \frac{\partial}{\partial x_2} d \\ \frac{\partial}{\partial x_3} d \end{bmatrix}, \lambda^{\frac{1}{2}} d, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \right) \in \mathfrak{X}_q(\mathbf{R}^3)$$

$$\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3) = L_q(\mathbf{R}^3)^{N_1}$$

$$N_1 = (N+1) + N = (3+1) + 3 = 7.$$

Dengan merujuk pada penelitian yang dilakukan (Saito, 2019), maka dapat dibuktikan teorema berikut,

Teorema 1 Misalkan $q \in (1, \infty)\ dan\ \delta > 0$ dan himpunan. Asumsikan bahwa $\mu, v,$ dan κ adalah konstanta positif, maka untuk setiap $\lambda \in \mathbf{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^0(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^0(\lambda)$ dengan,

$$\mathcal{A}^0(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3), W_q^3(\mathbf{R}^3) \right) \right),$$

$$\mathcal{B}^0(\lambda) \in \text{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_q^1(\mathbf{R}^3), W_q^2(\mathbf{R}^3)^3\right)\right).$$

Sehingga, untuk setiap $\mathbf{F}^1 = (d, f_1, f_2, f_3) \in X_q^1(\mathbf{R}^3)$ diperoleh operator solusi dari persamaan (2) yaitu $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\mathbf{F}^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\mathbf{F}^1)$.

Selanjutnya sistem persamaan (1) akan diselesaikan di $\mathbf{R}_+^3$ yang dilakukan dalam beberapa langkah, seperti melakukan reduksi terhadap sistem persamaan resolvent tak homogen (1) dengan pendekatan sistem (2) di $\mathbf{R}^3$ menjadi sistem persamaan resolvent homogen , kemudian dilakukan transformasi Fourier parsial terhadap sistem persamaan resolvent homogen untuk memperoleh persamaan diferensial biasa yang lebih sederhana yang akan dibahas pada bagian selanjutnya.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan dibahas proses pembuktian eksistensi operator solusi dari sistem persamaan (1). Misalkan ruang untuk fungsi pada ruas kanan sistem persamaan (1) di $\mathbf{R}_+^3$, $\mathbf{F}^2 = (d, f_1, f_2, f_3, g, h_1, h_2, h_3) \in X_q^2(\mathbf{R}^3)$, didefinisikan sebagai berikut,

$$X_q^2(\mathbf{R}^3) = W_q^1(\mathbf{R}_+^3) \times L_q(\mathbf{R}_+^3)^3 \times W_q^2(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3)^2 \times W_q^2(\mathbf{R}_+^3)$$

kemudian, $\mathcal{F}_\lambda\mathbf{F}^2$ dan $\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}^3)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda\mathbf{F}^2 = \;& \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}d \\ \frac{\partial}{\partial x_2}d \\ \frac{\partial}{\partial x_3}d \end{bmatrix}, \lambda^{\frac{1}{2}}d\right), \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}g & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}g & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}g \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}g & \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}g & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}g \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}g & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}g & \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_1}g \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_2}g \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}g \end{bmatrix}, \lambda g\right), \\ & \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}h_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}h_1 & \frac{\partial}{\partial x_3}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}h_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 & \frac{\partial}{\partial x_3}h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}}h_1 \\ \lambda^{\frac{1}{2}}h_2 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}h_3 & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}h_3 & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}h_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}h_3 & \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}h_3 & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}h_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}h_3 & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}h_3 & \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}h_3 \end{bmatrix},\right. \\ & \left.\begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_1}h_3 \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_2}h_3 \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_3}h_3 \end{bmatrix}, \lambda h_3\right) \in \mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}^3) = \;& L_q(\mathbf{R}^3)^{N_2} \\ N_2 = \;& (N+1) + N + (N^2 + N + 1) + (N-1)N + (N-1) + (N^2 + N + 1) \\ = \;& (3+1) + 3 + (3^2 + 3 + 1) + (3-1)3 + (3-1) + (3^2 + 3 + 1) = 41\end{aligned}$$

selain itu, misalkan ruang untuk solusi sistem persamaan (1) didefinisikan sebagai berikut

$$\mathfrak{A}_q^0(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)^{3^3+3^2+3+1},\; \mathfrak{B}_q^0(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)^{3^3+3^2+3}.$$

Tujuan utama dari penelitian ini adalah membuktikan eksistensi operator solusi sistem persamaan (1). Dengan kata lain akan dibuktikan teorema berikut,

Teorema 2 *Misalkan $q \in (1, \infty)$ dan $\delta > 0$. Asumsikan bahwa μ, ν, dan κ adalah konstanta positif. Kemudian, untuk setiap $\lambda \in \mathbf{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^1(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^1(\lambda)$ dengan,*

$$\mathcal{A}^1(\lambda) \in Hol\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^3(\mathbf{R}_+^3)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^1(\lambda) \in Hol\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\big(\mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^2(\mathbf{R}_+^3)^3\big)\right).$$

Sehingga, untuk setiap $\mathbf{F}^1 = (d, f_1, f_2, f_3, g, h_1, h_2, h_3) \in \mathfrak{X}_q^2(\mathbf{R}^3)$, diperoleh operator solusi dari persamaan (1) yaitu $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2)$.

Selanjutnya, terdapat beberapa tahapan dalam membuktikan Teorema 2. Pertama, dengan mereduksi sistem persamaan tak homogen (1) menjadi sistem persamaan homogen di $\mathbf{R}_+^3$, dan selanjutnya adalah menyelesaikan sistem persamaan homogen tersebut di $\mathbf{R}_+^3$.

Reduksi Sistem

Misalkan $u_j = k_j$ $(j = 1, 2)$ dan $u_3 = k_3 + h_3$, dengan $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^\intercal$, maka diperoleh

$$\left.\begin{array}{lr}
\lambda\rho + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} k_j\right) = \tilde{d} & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_1 - \mu\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) k_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} k_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = \widetilde{f_1} & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_2 - \mu\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) k_2 - v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} k_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = \widetilde{f_2} & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_3 - \mu\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) k_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} k_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)\rho = \widetilde{f_3} & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \rho = g & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}} k_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} k_3 = \tilde{h}_1 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_3} k_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} k_3 = \tilde{h}_2 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
k_3 = 0 & pada\ \mathbf{R}_0^3.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

dengan

$$\tilde{d} = d - \frac{\partial}{\partial x_3} h_3,\ \widetilde{f_1} = f_1 - \left(-v\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3} h_3\right),\ \widetilde{f_2} = f_2 - \left(-v\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3} h_3\right),$$

$$\widetilde{f_3} = f_3 - \left(\lambda h_3 - \mu\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) h_3 - v\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} h_3\right),\ \tilde{h}_1 = h_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 \text{ dan } \tilde{h}_2 = h_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_3.$$

Berikutnya, reduksi sistem persamaan (3) menggunakan ekstensi genap dan ekstensi nol untuk membentuk sistem persamaan homogen $(d, f_1, f_2, f_3) = (0,0,0,0)$. Untuk suatu fungsi $f =$

$f(x_1, x_2, x_3)$ dengan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3_+$, misalkan E^e adalah operator ekstensi genap (*even extension*) dan E^0 adalah operator ekstensi nol (*zero extension*) yang didefinisikan sebagai berikut,

$$E^e f \quad = E^e f(x_1, x_2, x_3) \quad = \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & (x_3 > 0), \\ f(x_1, x_2, -x_3), & (x_3 < 0). \end{cases}$$

$$E^0 f \quad = E^0 f(x_1, x_2, x_3) \quad = \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & (x_3 > 0), \\ -f(x_1, x_2, -x_3), & (x_3 < 0). \end{cases}$$

Selanjutnya, operator ekstensi dari fungsi vektor $\mathbf{f} = (f_1,\ f_2,\ f_3)^\intercal$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{Ef} = (E^e f_1,\ E^e f_2,\ E^0 f_3\ )^\mathrm{T} \text{ di } \mathbf{R}^3_+ \tag{4}$$

perhatikan bahwa, $E^e \in \mathcal{L}(W^1_q(\mathbf{R}^3_+), W^1_q(\mathbf{R}^3))$ dan $\mathbf{E} \in \mathcal{L}\big(L_q(\mathbf{R}^3_+)^3, L_q(\mathbf{R}^3)^3\big)$.

Misalkan $\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1$ dan $\mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1$ adalah operator solusi yang terdapat dalam Teorema 2 di $\mathbf{R}^3$ dan $(\tilde{d}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ merupakan fungsi pada sistem persamaan (3) yang terdapat di ruang $W^1_q(\mathbf{R}^3_+) \times L_q(\mathbf{R}^3_+)^3$. Kemudian, definisikan operator H dan $\mathbf{K}$ sebagai berikut,

$$H = \mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\big(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\big), \quad \mathbf{K} = \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3) \tag{5}$$

dengan $\mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\big(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\big) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^1_1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\big(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\big), \\ \mathcal{B}^1_2(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\big(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\big), \\ \mathcal{B}^1_3(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\big(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\big) \end{pmatrix}$

lalu, definisikan operator $P = P(x_1, x_2, x_3)$ dan $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3)$ sebagai berikut,

$$P = H(x_1, x_2, -x_3), \quad \mathbf{Q} = (K_1(x_1, x_2, -x_3), K_2(x_1, x_2, -x_3), -K_3(x_1, x_2, -x_3))^\intercal \tag{6}$$

sehingga, K_J dan Q_J merupakan komponen sebanyak J dari fungsi $\mathbf{K}$ dan $\mathbf{Q}$ dengan $J = 1, 2{,}3$. Akibatnya,

$$Q_3(x_1, x_2, x_3) = -K_3(x_1, x_2, -x_3). \tag{7}$$

Berikutnya, subtitusi operator H dan $\mathbf{K}$ pada persamaan (5) ke sistem persamaan (3), sehingga pada baris pertama diperoleh

$$\begin{aligned} &\left(\lambda P + \left(\textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} Q_j\right)\right)(x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(\lambda H + \left(\textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} K_j\right)\right)(x_1, x_2, -x_3) \\ &= \big(E^e\tilde{d}\big)(x_1, x_2, -x_3) \\ &= \big(E^e\tilde{d}\big)(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

pada baris kedua diperoleh

$$\left(\lambda Q_1 - \mu\left(\textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) Q_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial_{x_j}} Q_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right) P\right)(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\lambda K_1 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)K_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}K_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)H\right)(x_1, x_2, -x_3)$$

$$= \left(E^e \tilde{f}_1\right)(x_1, x_2, -x_3)$$

$$= \left(E^e \tilde{f}_1\right)(x_1, x_2, x_3)$$

dengan menggunakan cara yang sama pada baris ketiga diperoleh

$$\left(E^e \tilde{f}_2\right)(x_1, x_2, -x_3) = \left(E^e \tilde{f}_2\right)(x_1, x_2, x_3)$$

pada baris keempat diperoleh

$$\left(\lambda Q_3 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)Q_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_j}Q_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)P\right)(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\lambda K_3 - \mu\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)K_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_j}K_j\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_j}{}^2}\right)H\right)(x_1, x_2, -x_3)$$

$$= -(E^0 \tilde{f}_3)(x_1, x_2, -x_3)$$

$$= \left(E^0 \tilde{f}_3\right)(x_1, x_2, x_3).$$

Dengan demikian, P dan $\mathbf{Q}$ juga merupakan operator solusi di $\mathbf{R}^3$. Maka, berdasarkan ketunggalan solusi di $\mathbf{R}^3$ diperoleh

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2, x_3) &= K_1(x_1, x_2, x_3) \\ Q_2(x_1, x_2, x_3) &= K_2(x_1, x_2, x_3) \\ Q_3(x_1, x_2, x_3) &= K_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Akibatnya, berdasarkan persamaan (7) dan (8) diperoleh $K_3(x_1, x_2, x_3) = -K_3(x_1, x_2, x_3)$. Sehingga ketika $x_3 = 0$, maka $K_3(x_1, x_2, 0) = -K_3(x_1, x_2, 0)$ jika dan hanya jika $K_3(x_1, x_2, 0) = 0$.

Berikutnya, misalkan $\rho = H + \tilde{\rho}$ dan $\mathbf{k} = \left(K_1 + \tilde{k}_1, K_2 + \tilde{k}_2, K_3 + \tilde{k}_3\right) = \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{k}}$, dengan $H, \mathbf{K}$ adalah solusi operator di $\mathbf{R}^3$ yang didefinisikan pada persamaan (5), sehingga diperoleh sistem persamaan homogen sebagai berikut,

$$\left.\begin{array}{lr}
\lambda\tilde{\rho} + \left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_J}} \tilde{k}_J\right) = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda\tilde{k}_1 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{k}_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_J}} \tilde{k}_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{\rho} = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda\tilde{k}_2 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{k}_2 - v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_J}} \tilde{k}_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{\rho} = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda\tilde{k}_3 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{k}_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_J}} \tilde{k}_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\tilde{\rho} = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{\rho} = -\tilde{g} & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}}\tilde{k}_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{k}_3 = \widetilde{\tilde{h}_1} & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}}\tilde{k}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{k}_3 = \widetilde{\tilde{h}_2} & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\tilde{k}_3 = 0 & pada\ \mathbf{R}_0^3
\end{array}\right\} \quad (9)$$

dengan

$$\tilde{g} = g + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\left(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\right),$$

$$\widetilde{\tilde{h}_1} = h_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}h_3 - \frac{\partial}{\partial x_{3,}}\left(\mathcal{B}_1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\left(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\right)\right)_1 -$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathcal{B}_3(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\left(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\right)\right)_3,$$

$$\widetilde{\tilde{h}_2} = h_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}h_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mathcal{B}_2(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\left(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\right)\right)_2 -$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathcal{B}_3(\lambda)\mathcal{F}_\lambda\left(E^e\tilde{d}, E^e\tilde{f}_1, E^e\tilde{f}_2, E^0\tilde{f}_3\right)\right)_3.$$

Untuk menyelesaikan pembuktian Teorema 2 cukup dengan menyelesaikan sistem persamaan homogen (9) yang akan dibahas pada bagian berikut.

Penyelesaian Sistem Persamaan Homogen di $\mathbf{R}_+^3$

Secara sederhana, sistem persamaan homogen (9) dapat ditulis sebagai

$$\left.\begin{array}{lr}
\lambda\rho + \left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_J}}k_J\right) = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_1 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)k_1 - v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_J}}k_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\rho = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_2 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)k_2 - v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_J}}k_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\rho = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\lambda k_3 - \mu\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)k_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial}{\partial_{x_J}}k_J\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_{J=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial_{x_J}{}^2}\right)\rho = 0 & di\ \mathbf{R}_+^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_3}\rho = -g & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}}k_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}k_3 = h_1 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
\frac{\partial}{\partial x_{3,}}k_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}k_3 = h_1 & pada\ \mathbf{R}_0^3 \\
k_3 = 0 & pada\ \mathbf{R}_0^3
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Untuk fungsi di ruas kanan pada sistem persamaan (10), misalkan $\mathbf{G} = (g, h_1, h_2)$, maka didefinisikan ruang $\mathbf{G}$ sebagai berikut,

$$X_q^2(\mathbf{R}_+^3) = W_q^2(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3) \times W_q^1(\mathbf{R}_+^3)$$

kemudian, $\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G}$ dan $X_q^2(\mathbf{R}_+^3)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}g & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}g & \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}g \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_2}g & \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}g & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}g \\ \frac{\partial}{\partial x_1\partial x_3}g & \frac{\partial}{\partial x_2\partial x_3}g & \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}g \end{bmatrix}, \lambda^{\frac{1}{2}}g, \lambda g\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}h_1, \frac{\partial}{\partial x_2}h_1, \frac{\partial}{\partial x_3}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}h_2, \frac{\partial}{\partial x_2}h_2, \frac{\partial}{\partial x_3}h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}}h_1 \\ \lambda^{\frac{1}{2}}h_2 \end{bmatrix}\right) \in X_q^2(\mathbf{R}_+^3)$$

$$X_q^2(\mathbf{R}_+^3) = L_q(\mathbf{R}_+^3)^{N_3}$$

$$N_3 = (N^2 + N + 1) + (N-1)(N+1) = (3^2 + 3 + 1) + (3-1)(3+1) = 21.$$

Selanjutnya, akan digunakan teorema berikut ini untuk melengkapi pembuktian Teorema 2.

Teorema 3 Misalkan $q \in (1, \infty)$ dan asumsikan bahwa μ, ν, dan κ adalah konstanta positif. Kemudian, untuk setiap $\lambda \in \mathrm{C}_+$ terdapat operator $\mathcal{A}^2(\lambda)$ dan $\mathcal{B}^2(\lambda)$ dengan,

$$\mathcal{A}^2(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathrm{C}_+, \mathcal{L}\left(X_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^3(\mathbf{R}_+^3)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^2(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathrm{C}_+, \mathcal{L}\left(X_q^2(\mathbf{R}_+^3), W_q^2(\mathbf{R}_+^3)^3\right)\right).$$

Sehingga, untuk setiap $\mathbf{G} = (g, h_1, h_2) \in X_q^2(\mathbf{R}_+^3)$ diperoleh operator solusi dari persamaan (10) yaitu $(\rho, \mathbf{k}) = (\mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G}, \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G})$.

Pembuktian

Terlebih dahulu akan diperkenalkan definisi transformasi Fourier parsial. Diberikan fungsi ρ yang terdefinisi pada $\mathbf{R}^3$, maka transformasi Fourier parsial dari $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ didefinisikan sebagai

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}(x_3) = \hat{\rho}(\xi_1, \xi_2, x_3) = \mathcal{F}[\rho](\xi_1, \xi_2, x_3) = \int_{\mathrm{R}} \int_{\mathrm{R}} e^{-i(x_1,x_2)\cdot(\xi_1,\xi_2)} \rho(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2$$

dan invers transformasi Fourier parsial dari ρ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}[\hat{\rho}(\xi_1, \xi_2, x_3)](x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathrm{R}} \int_{\mathrm{R}} e^{i(x_1,x_2)\cdot(\xi_1,\xi_2)} \rho(\xi_1, \xi_2, x_3)\, d\xi_1 d\xi_2.$$

Misalkan $\varphi = \left(\sum_{J=1}^{3} \frac{\partial}{\partial_{x_J}} k_J\right)$, kemudian dengan melakukan transformasi Fourier parsial terhadap sistem persamaan (10) diperoleh

$$\lambda\hat{\rho} + \hat{\varphi} = 0, \qquad x_3 > 0, \tag{11}$$

$$\lambda \hat{k}_1 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_1 - vi\xi_1\hat{\varphi} - \kappa i\xi_1\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{\rho} = 0, x_3 > 0, \tag{12}$$

$$\lambda \hat{k}_2 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_2 - vi\xi_2\hat{\varphi} - \kappa i\xi_2\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{\rho} = 0, x_3 > 0, \tag{13}$$

$$\lambda \hat{k}_3 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_3 - v\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{\varphi} - \kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{\rho} = 0, x_3 > 0 \tag{14}$$

dengan syarat batas sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{\rho}(0) = -\hat{g}(0) \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{3,}}\hat{k}_1(0) + i\xi_1\hat{k}_3(0) = \hat{h}_1(0) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{3,}}\hat{k}_2(0) + i\xi_2\hat{k}_3(0) = \hat{h}_2(0) \tag{17}$$

$$\hat{k}_3(0) = 0 \tag{18}$$

di mana

$$\hat{\varphi} = i\xi_1\, \hat{k}_1 + i\xi_2\, \hat{k}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{k}_3 \tag{19}$$

persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$\hat{\rho} = -\frac{\hat{\varphi}}{\lambda}. \tag{20}$$

Selanjutnya, subtitusi persamaan (20) ke persamaan (12), (13), (14) dan (15) sehingga diperoleh

$$\lambda^2\hat{k}_1 - \lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_1 - i\xi_1\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0 \tag{21}$$

$$\lambda^2\hat{k}_2 - \lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_2 - i\xi_2\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0 \tag{22}$$

$$\lambda^2\hat{k}_3 - \lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{k}_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{\varphi}(0) = \lambda\hat{g}(0). \tag{24}$$

Dengan mengalikan persamaan (21) dan (22) terhadap $i\xi_1$ dan $\mathrm{i}\xi_2$, serta menurunkan sekali persamaan (23) terhadap x_3 dan menyederhanakan hasilnya, berdasarkan persamaan (19) diperoleh

$$\lambda^2\hat{\varphi} - \lambda(\mu+v)\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\hat{\varphi} + \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)^2 \hat{\varphi} = 0, x_3 > 0. \tag{25}$$

Kemudian, definisikan sebuah polinomial $P_\lambda(t)$ sebagai berikut,

$$P_\lambda(t) = \lambda^2 - \lambda(\mu+v)\left(t^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right) + \kappa\left(t^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)^2 \tag{26}$$

dengan demikian, dari persamaan (25) diperoleh persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

$$P_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0. \tag{27}$$

Misalkan $w_\lambda^2 = \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}$ akibatnya $w_\lambda = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}}$. Kemudian, substitusi w_λ ke persamaan (21), (22) dan (23) sehingga diperoleh

$$\lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - w_\lambda^2\right)\hat{k}_1 + i\xi_1\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0 \tag{28}$$

$$\lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - w_\lambda^2\right)\hat{k}_2 + i\xi_2\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0 \tag{29}$$

$$\lambda\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - w_\lambda^2\right)\hat{k}_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda v - \kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right)\hat{\varphi} = 0, x_3 > 0. \tag{30}$$

Lakukan perkalian terhadap persamaan (28), (29) dan (30) dengan $P_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} - w_\lambda^2\right)P_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\hat{k}_J = 0, x_3 > 0 \qquad \text{untuk } (J = 1,2,3). \tag{31}$$

Berikutnya, akan dicari akar-akar karakteristik dari persamaan (27) dan (31). Berdasarkan sifat distributif, polinomial pada persamaan (26) dapat ditulis sebagai berikut

$$P_\lambda(t) = \kappa\lambda^2\left(\frac{1}{\kappa} - \left(\frac{\mu+v}{\kappa}\right)\left(\frac{t^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{\lambda}\right) + \left(\frac{t^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{\lambda}\right)^2\right) \tag{32}$$

misalkan $r = \left(\frac{t^2 - |\xi'|^2}{\lambda}\right)$, maka persamaan (32) dapat disederhanakan menjadi

$$P_\lambda(t) =: \kappa\lambda^2 p(r) \tag{33}$$

kemudian, misalkan μ, v dan κ adalah konstanta positif. Definisikan $p(r)$ sebagai berikut,

$$p(r) = r^2 - \frac{\mu+v}{\kappa}r + \frac{1}{\kappa}$$

sehingga diperoleh akar dari $p(r)$ yaitu

$$r_\pm = \begin{cases} \frac{\mu+v}{2\kappa} \pm \sqrt{\eta}, & (\eta \geq 0) \\ \frac{\mu+v}{2\kappa} \pm i\sqrt{|\eta|}, & (\eta < 0) \end{cases}$$

dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $\eta = \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa}, \eta \neq 0$. Atau dapat ditulis sebagai $r_n (n = 1,2,3,4)$ dengan

$$r_1 = \frac{\mu+v}{2\kappa} + \sqrt{\eta}$$
$$r_2 = \frac{\mu+v}{2\kappa} - \sqrt{\eta}$$

untuk $\eta \geq 0$, dan

$$r_3 = \frac{\mu+v}{2\kappa} + i\sqrt{|\eta|}$$
$$r_4 = \frac{\mu+v}{2\kappa} - i\sqrt{|\eta|}$$

untuk $\eta < 0$.

Perhatikan $r_n = \left(\frac{t^2-|\xi'|^2}{\lambda}\right)$ dengan $(n = 1,2,3,4)$, selanjutnya diperoleh akar dari $P_\lambda(t)$ pada persamaan (33) sebagai berikut

$$t = \pm\sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \lambda r_n}$$

sehingga diperoleh

$$t_{1n} = -\sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \lambda r_n} \text{ dan } t_{2n} = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \lambda r_n}$$

dengan demikian, $t_{2n}(n = 1,2,3,4)$ adalah akar karakteristik dari persamaan (27) dan (31). Kemudian diperoleh akar karakteristik yang lain dari persamaan (31) yaitu

$$t_1 = -w_\lambda \text{ dan } t_2 = w_\lambda$$

dengan $w_\lambda = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}}$. Maka, $t_{2n}(n = 1,2,3,4)$ dan t_2 adalah akar-akar karakteristik dari persamaan (31).

Dengan demikian, pada kasus $\eta < 0$, $t_{2n}(n = 3,4)$ merupakan akar karakteristik dari persamaan (27) dan (31) di mana

$$t_{2n} = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \lambda r_n}\ , n = 3,4$$

serta t_2 merupakan akar karakteristik yang lain dari persamaan (31) di mana

$$t_2 = w_\lambda = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}}\ .$$

Kemudian, Pada kasus $\eta > 0$, $t_{2n}(n = 1,2)$ merupakan akar karakteristik persamaan (27) dan (31) di mana

$$t_{2n} = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \lambda r_n}\ , n = 1,2$$

serta t_2 merupakan akar karakteristik yang lain dari persamaan (31) di mana

$$t_2 = w_\lambda = \sqrt{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}}\ .$$

Pada kedua kasus tersebut diperoleh bentuk akar karateristik yang sama, sehingga dapat diselesaikan secara sekaligus. Dengan demikian, diperoleh solusi umum dari persamaan (27) dan (31) sebagai berikut,

$$\hat{\varphi} = \sigma e^{-t_{21}x_3} + \tau e^{-t_{22}x_3} \tag{34}$$

$$\hat{k}_J = \alpha_J e^{-w_\lambda x_3} + \beta_J(e^{-t_{21}x_3} - e^{-w_\lambda x_3}) + \gamma_J(e^{-t_{22}x_3} - e^{-w_\lambda x_3}), \quad J = (1,2,3) \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{k}_J = w_\lambda(-\alpha_J + \beta_J + \gamma_J)e^{-w_\lambda x_3} - t_{21}\beta_J e^{-t_{21}x_3} - t_{22}\gamma_J e^{-t_{22}x_3}, \quad J = 1,2,3 \tag{36}$$

Berikutnya, akan dicari nilai koefisien dari solusi umum persamaan karakteristik (34) dan (35). Terlebih dahulu, subtitusi persamaan (35) ke persamaan (19) sehingga diperoleh

$$\sigma = i\xi' \cdot \beta' - t_{21}\beta_3, \quad \tau = i\xi' \cdot \gamma' - t_2\gamma_3 \tag{37}$$

$$i\xi' \cdot \alpha' - i\xi' \cdot \beta' - i\xi' \cdot \gamma' - w_\lambda\alpha_3 + w_\lambda\beta_3 + w_\lambda\gamma_3 = 0 \tag{38}$$

dengan $i\xi' \cdot a' = \sum_{j=1}^{2} i\xi_j a_J$ untuk $a \in \{\alpha', \beta', \gamma'\}$.

Berdasarkan asumsi bahwa $\kappa \neq \mu v$, selanjutnya subtitusi persamaan (34) dan (35) ke persamaan (28), (29) dan (30) sehingga diperoleh

$$\lambda\mu\beta_1(t_{21}^2 - w_\lambda^2) + i\xi_1(i\xi' \cdot \beta' - t_{21}\beta_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{21}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0,$$

$$\lambda\mu\gamma_1(t_{22}^2 - w_\lambda^2) + i\xi_1(i\xi' \cdot \gamma' - t_{22}\gamma_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{22}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0$$

$$\lambda\mu\beta_2(t_{21}^2 - w_\lambda^2) + i\xi_2(i\xi' \cdot \beta' - t_{21}\beta_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{21}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0,$$

$$\lambda\mu\gamma_2(t_{22}^2 - w_\lambda^2) + i\xi_2(i\xi' \cdot \gamma' - t_{22}\gamma_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{22}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0$$

$$\lambda\mu\beta_3(t_{21}^2 - w_\lambda^2) - t_{21}(i\xi' \cdot \beta' - t_{21}\beta_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{21}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0,$$

$$\lambda\mu\gamma_3(t_{22}^2 - w_\lambda^2) - t_{22}(i\xi' \cdot \gamma' - t_{22}\gamma_3)\left(\lambda v - \kappa\left({t_{22}}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|\right)\right) = 0$$

akibatnya,

$$(t_{21}^2 - w_\lambda^2)\left(\beta_j + \frac{i\xi_j}{t_{21}}\beta_3\right) = 0, \;\; j = 1,2$$

$$(t_{21}^2 - w_\lambda^2)\left(\gamma_j + \frac{i\xi_j}{t_{22}}\gamma_3\right) = 0, \quad j = 1,2$$

karena $t_{21} \neq w_\lambda$ dan $t_{21} \neq w_\lambda$, maka diperoleh koefisien β_j dan γ_j sebagai berikut

$$\beta_j = -\frac{i\xi_j}{t_{21}}\beta_3\,, \;\; \gamma_j = -\frac{i\xi_j}{t_{22}}\gamma_3, \;\; j = 1,2. \tag{39}$$

Selanjutnya, lakukan perkalian terhadap koefisien β_j dan γ_j dengan $i\xi_j$, diperoleh

$$i\xi' \cdot \beta' = \frac{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{t_{21}}\beta_3\;\;,\;\; i\xi' \cdot \gamma' = \frac{\left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{t_{22}}\gamma_3 \tag{40}$$

akibatnya,

$$i\xi' \cdot \beta' - t_{21}\beta_3 = -\left(\frac{t_{21}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{t_{21}}\right)\beta_3, \;\; i\xi' \cdot \gamma' - t_{22}\gamma_3 = -\left(\frac{t_{22}^2 - \left|{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2\right|}{t_{22}}\right)\gamma_3. \tag{41}$$

Untuk memperoleh koefisien α_3, subtitusi persamaan (35) ke syarat batas (18), diperoleh

$$\alpha_3 = 0. \tag{42}$$

Lalu, untuk memperoleh koefisien α_J, terlebih dahulu subtitusi persamaan (36) ke syarat batas (16) dan (17), diperoleh

$$-w_\lambda \alpha_j + (-t_{21} + w_\lambda)\beta_j + (-t_{22} + w_\lambda)\gamma_j = \hat{h}_j(0), \quad j = 1,2. \tag{43}$$

kemudian, subtitusi persamaan (39) ke persamaan (43), diperoleh

$$\alpha_J = \frac{\left\{-\hat{h}_j(0) + \frac{i\xi_j}{t_{21}}(t_{21} - w_\lambda)\beta_3 + \frac{i\xi_j}{t_{22}}(t_{22} - w_\lambda)\gamma_3\right\}}{w_\lambda}. \tag{44}$$

Berikutnya, akan dicari koefisien β_3 dan γ_3, terlebih dahulu kalikan persamaan (43) dengan $i\xi_j$, lalu subtitusikan pula persamaan (41), diperoleh

$$-w_\lambda i\xi' \cdot \alpha' - \frac{|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|}{t_{21}}(t_{21} - w_\lambda)\beta_3 - \frac{|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|}{t_{22}}(t_{22} - w_\lambda)\gamma_3 = i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(\mathbf{0}) \tag{45}$$

kemudian, subtitusi persamaan (40) ke persamaan (38) dengan $\alpha_3 = 0$, diperoleh

$$i\xi' \cdot \alpha' = \left(\frac{|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|}{t_{21}} - w_\lambda\right)\beta_3 + \left(\frac{|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|}{t_{22}} - w_\lambda\right)\gamma_3 \tag{46}$$

subtitusikan persamaan (46) ke persamaan (45), kemudian subtitusikan pula akar

$w_\lambda = \sqrt{\left|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2\right| + \frac{\lambda}{\mu}}$ sehingga diperoleh

$$\frac{\mu}{\lambda} i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) - \gamma_3 = \beta_3 \tag{47}$$

lalu, subtitusikan persamaan (34) ke syarat batas (24), kemudian subtitusikan pula persamaan (41) sehingga diperoleh

$$\lambda\hat{g}(0) = \left(t_{21}^2 - \left|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2\right|\right)\beta_3 + \left(t_{22}^2 - \left|\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2\right|\right)\gamma_3 \tag{48}$$

dengan menyelesaikan persamaan (47) dan persamaan (48) , diperoleh koefisien β_3 dan γ_3 sebagai berikut,

$$\beta_3 = -\frac{1}{t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_2\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right) \tag{49}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_1\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right). \tag{50}$$

Selanjutnya, substitusikan koefisien β_3 dan $\gamma_3$pada persamaan (49) dan (50) ke persamaan (39),(41) dan (44), sehingga diperoleh nilai koefisien $\sigma, \tau, \alpha_j, \beta_j$ dan γ_j sebagai berikut,

$$\sigma = \frac{\lambda r_1}{t_{21}\left(t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2\right)}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_2\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right) \tag{51}$$

$$\tau = -\frac{\lambda r_2}{t_{22}\left(t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2\right)}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_1\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right) \tag{52}$$

$$\beta_j = \frac{i\xi_j}{t_{21}\left(t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2\right)}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_2\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right) \tag{53}$$

$$\gamma_j = -\frac{i\xi_j}{t_{22}\left(t_{22}{}^2 - t_{21}{}^2\right)}\left(\lambda\hat{g}(0) - r_1\mu i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\right) \tag{54}$$

$$\alpha_J = \frac{-\hat{h}_j(0)}{w_\lambda} + \frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l \frac{i\xi_j(t_{2l}-w_\lambda)}{w_\lambda t_{2l}}\hat{g}(0) + \frac{i\xi_j}{w_\lambda}\frac{\mu}{(t_{22}{}^2-t_{21}{}^2)}\left(\frac{r_2(t_1-w_\lambda)}{t_{21}} - \frac{r_1(t_2-w_\lambda)}{t_{22}}\right) i\xi' \cdot \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}). \tag{55}$$

Misalkan,

$$\mathcal{Z}_0(x_3) = \frac{e^{-t_{22}x_3} - e^{-t_{21}x_3}}{t_{22}-t_{21}}, \quad \mathcal{Z}_l(x_3) = \frac{e^{-t_l x_3} - e^{-w_\lambda x_3}}{t_{22}-t_{21}} \quad (l = 1,2). \tag{56}$$

Catatan, $r_{22} = \frac{(t_{22}{}^2 - |\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|)}{\lambda}$ dan $r_{21} = \frac{(t_{21}{}^2 - |\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2|)}{\lambda}$ sehingga

$$r_{22} - r_{21} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{\lambda} \tag{57}$$

$$\frac{1}{r_{22}-r_{21}} = \frac{\lambda}{t_{22}^2 - t_{21}^2} \tag{58}$$

$$\frac{1}{t_{21}} - \frac{1}{t_{22}} = \frac{\lambda(s_{22}-s_{21})}{t_{21}t_{22}(t_{22}+t_{21})} \tag{59}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan Teorema 3 dengan mensubtitusikan koefisien $\alpha_j, \beta_j,$ dan γ_j pada persamaan (53), (54), (55), definisi (56), dan catatan (57), (59) terhadap solusi umum persamaan karakteristik (34) ke-j, $(j = 1,2)$ untuk memperoleh $\hat{k}_J$ sebagai berikut,

$$\hat{k}_J = \Bigg[\frac{-\hat{h}_j(0)}{w_\lambda} + \frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l \frac{i\xi_j(t_{2l}-w_\lambda)}{w_\lambda t_{2l}}\hat{g}(0) + \frac{\mu r_2 r_1}{(r_2-r_1)}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\left(\frac{r_l-\mu^{-1}}{r_l}\right) \frac{\xi_j\xi_k}{t_1 w_\lambda(t_1+w_\lambda)}\hat{h}_k(0)\cdot\hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\Bigg] e^{-w_\lambda x_3} - \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\left[\frac{i\xi_j\lambda}{t_{2l}(t_{22}+t_{21})}\right]\hat{g}(0)\mathcal{Z}_l(x_3) - r_1 r_2\mu\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{1}{r_l}\frac{\xi_j\xi_k}{t_{2l}(t_{22}+t_{21})}\hat{h}_k(0)\mathcal{Z}_l(x_3) \tag{60}$$

kemudian, substitusikan koefisien $\alpha_3, \beta_3,$ dan γ_3 pada persamaan (53), (54), (55), definisi (56) dan catatan (57),(59) terhadap solusi umum persamaan karakterisik (35) ke-3 untuk memperoleh $\hat{k}_3$ sebagai berikut

$$\hat{k}_3 = \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{\lambda}{(t_{22}+t_{21})}\hat{g}(0)\mathcal{Z}_l(x_3) - r_1 r_2\mu\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{1}{r_1}\frac{i\xi'\cdot\hat{\boldsymbol{h}}(0)}{(t_{22}+t_{21})}\mathcal{Z}_l(x_3). \tag{61}$$

Selanjutnya, lakukan penjumlahan koefisien pada persamaan (51) dan (52), diperoleh

$$\sigma + \tau = \frac{1}{r_2-r_1}\left(\frac{r_1}{t_{21}} - \frac{r_2}{t_{22}}\right)\lambda\hat{g}(0) - \frac{\mu r_1 r_2}{r_2-r_1}\left(\frac{1}{t_{21}} - \frac{1}{t_{22}}\right) i\xi'\cdot\hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0}) \tag{62}$$

substitusikan koefisien σ, τ dan $\sigma + \tau$ pada persamaan (51), (52), (62) terhadap solusi umum persamaan karakteristik (34) untuk memperoleh φ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\varphi &= -\sigma(e^{-t_2x_3} - e^{-t_1x_3}) + (\sigma+\tau)(e^{-t_2x_3} - e^{-t_1x_3}) + (\sigma+\tau)e^{-t_1x_3} \\ &= \left(-\frac{\lambda r_2}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\right)\lambda\hat{g}(0)\mathcal{Z}_0(x_3) + \left(\frac{\lambda r_1 r_2}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\right)\mu i\xi'\cdot\hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})\mathcal{Z}_0(x_3) \\ &\quad - \frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{r_l}{t_{2l}}\lambda\hat{g}(0)e^{-t_1x_3} - \frac{\lambda\mu r_1 r_2}{(t_{22}+t_{21})t_{21}t_{22}} i\xi'\cdot\hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{0})e^{-t_1x_3}\end{aligned} \tag{63}$$

Kemudian, untuk memperoleh solusi operator ρ substitusi persamaan (63) ke persamaan (20) terlebih dahulu sebagai berikut,

$$\hat{\rho} = \left(\frac{r_2}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\right)\lambda\hat{g}(0)\mathcal{Z}_0(x_3) - \mu r_1 r_2 \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{i\xi_k}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\right)\hat{h}_k(0)\mathcal{Z}_0(x_3) \quad (64)$$
$$+\frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l \frac{r_l}{t_{2l}}\hat{g}(0)e^{-t_1x_3} +$$
$$\mu r_1 r_2 \sum_{k=1}^{2}\frac{i\xi_k}{(t_{22}+t_{21})t_{21}t_{22}}\hat{h}_k(0)e^{-t_1x_3}$$

berikutnya, dilakukan invers tranformasi fourier parsial terhadap persamaan (60),(61), dan (64) untuk memperoleh operator solusi ρ dan **k** sebagai berikut,

$$k_j = -\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\hat{h}_j(0)}{w_\lambda}(\xi_1,\xi_2,0)e^{-w_\lambda x_3}\right](x_1x_2) +$$
$$\frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{i\xi_j(t_{2l}-w_\lambda)}{w_\lambda t_{2l}}\hat{g}(0)(\xi_1,\xi_2,0)e^{-w_\lambda x_3}\right](x_1x_2)$$
$$+\frac{\mu r_2 r_1}{(r_2-r_1)}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\left(\frac{r_l-\mu^{-1}}{r_l}\right)\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\xi_j\xi_k}{t_1 w_\lambda(t_1+w_\lambda)}\hat{h}_k(0)(\xi_1,\xi_2,0)e^{-w_\lambda x_3}\right](x_1x_2)$$
$$-\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{i\xi_j\lambda}{t_{2l}(t_{22}+t_{21})}\hat{g}(0)(\xi_1,\xi_2,0)\mathcal{Z}_l(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$-r_1r_2\mu\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{1}{r_l}\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\xi_j\xi_k}{t_{2l}(t_{22}+t_{21})}\hat{h}_k(0)\mathcal{Z}_l(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$k_j =: \mathcal{B}_j^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G} \quad (65)$$
$$k_3 = \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\lambda}{(t_{22}+t_{21})}\hat{g}(0)\mathcal{Z}_l(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$-r_1r_2\mu\sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{1}{r_1}\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{i\xi'\cdot\hat{\mathbf{h}}(0)}{(t_{22}+t_{21})}\mathcal{Z}_l(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$k_3 =: \mathcal{B}_3^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda \quad (66)$$

sehingga operator solusi **k** dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{k} =: \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G}. \quad (67)$$

Kemudian, diperoleh operator solusi ρ sebagai berikut

$$\rho = r_2\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{\lambda}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\hat{g}(0)\mathcal{Z}_0(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$-\mu r_1 r_2\sum_{k=1}^{2}\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{i\xi_k}{t_{22}(t_{22}+t_{21})}\hat{h}_k(0)\mathcal{Z}_0(x_3)\right](x_1x_2)$$
$$+\frac{1}{r_2-r_1}\sum_{l=1}^{2}(-1)^l r_l\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{1}{t_{2l}}\hat{g}(0)e^{-t_1x_3}\right](x_1x_2) +$$
$$\mu r_1 r_2\sum_{k=1}^{2}\mathcal{F}^{-1}_{(\xi_1,\xi_2)}\left[\frac{i\xi_k}{(t_{22}+t_{21})t_{21}t_{22}}\hat{h}_k(0)e^{-t_1x_3}\right](x_1x_2)$$
$$\rho \coloneqq \mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\mathbf{G} \quad (68)$$

Dengan demikian, Teorema 3 terbukti bahwa terdapat operator solusi (67) dan (68) dari sistem persamaan (10) di $\mathbf{R}^3_+$.

Langkah selanjutnya dalam membuktikan Teorema 2 adalah dengan melakukan penjumlahan operator solusi dari sistem persamaan homogen (10), yakni (67) dan (68) dengan operator solusi di $\mathbf{R}^3_+$ yang sudah diketahui dari hasil pendekatan solusi di $\mathbf{R}^3$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho &= H + \tilde{\rho} \\ &= \mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1 + \mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\ &= \mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2 \end{aligned}$$

selanjutnya, misalkan $\mathbf{u} = \mathbf{k} + h\mathbf{n}$ dengan $\mathbf{k} = \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{k}}$, maka $\mathbf{u}$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{k} + h\mathbf{n} \\ &= \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^1 + \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G} \\ &= \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2). \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh operator solusi dari sistem persamaan resolvent (1) dengan syarat batas *slip* di $\mathbf{R}^3_+$ untuk kasus koefisien $\eta = \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0$ dan $\eta = \left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0$, $\kappa \neq \mu v$ yaitu,

$$(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2)).$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa Teorema 2 terbukti.

Simpulan dan Saran

Pada penelitian ini dapat dibuktikan eksistensi operator solusi model *Navier Stokes Korteweg* dengan syarat batas *slip* di $\mathbf{R}^3_+$ pada kasus koefisien $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0$ dan $\left(\frac{\mu+v}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0$, $\kappa \neq \mu v$, yakni dengan menggunakan pendekatan solusi ketika di $\mathbf{R}^3$, kemudian dilakukan reduksi pada sistem persamaan resolvent yang tak homogen agar diperoleh sistem persamaan yang homogen di $\mathbf{R}^3_+$, dan selanjutnya menyelesaikan sistem persamaan homogen tersebut di $\mathbf{R}^3_+$ menggunakan transformasi Fourier parsial. Pada kedua kasus ini, karena diperoleh akar akar karakteristik yang sama, maka dapat diselesaikan secara sekaligus sehingga diperoleh operator solusi $(\rho, \mathbf{u}) = (\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda \mathbf{F}^2))$. Pada penelitian selanjutnya, diharapkan mampu mengestimasi operator solusi ($\mathcal{R}$-*bounded*) pada kasus yang sama di *bent half-space* (Ω_+).

Referensi

Danchin, R., & Desjardins, B. (2001). Existence of solutions for compressible fluid models of korteweg type. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Analyse Non Lineaire*, *18*(1), 97–133. https://doi.org/10.1016/S0294-1449(00)00056-1

Dunn, J. E., & Serrin, J. (1985). On the thermomechanics of interstitial working. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *88*, 95–133. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121445779

Fox, R. W., Mcdonald, A. T., Pritchard, P. J., & Leylegian, J. C. (2011). *Fox and McDonald's introduction to fluid mechanics.* John Wiley & Sons, Inc.

Haspot, B. (2009). *Existence of weak solution for compressible fluid models of Korteweg type*. https://doi.org/10.1007/s00021-009-0013-2

Hattori, H. H. H., & Li, D. (1996). Global Solutions of a High Dimensional System for Korteweg Materials. Dalam *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND*

APPLICATIONS (Vol. 198).

Hattori, H., & Li, D. (1994). Solutions for Two-Dimensional System for Materials of Korteweg Type. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *25*(1), 85–98. https://doi.org/10.1137/S003614109223413X

Inna, S. *The Existence Of R-Bounded Solution Operator For Navier Stokes Korteweg Model With Slip Boundary Conditions In Half Space*. *Mathematical Method in The Applied Science, to appear*.

Inna, S., Fauziah, I., Manaqib, M., & Maya Putri, P. (2023). Operator Solusi Model Fluida Termampatkan Tipe Korteweg Dengan Kondisi Batas Slip di Half-Space Kasus Koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} < 0,\ \kappa = \mu\nu, \mu \neq \nu$. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *20*(2), 191. https://doi.org/10.12962/limits.v20i2.12954

Inna, S., Maryani, S., & Saito, H. (2020). Half-space model problem for a compressible fluid model of Korteweg type with slip boundary condition. *Journal of Physics: Conference Series*, *1494*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1494/1/012014

Inna, S., & Saito, H. (2023). Local Solvability for a Compressible Fluid Model of Korteweg Type on General Domains. *Mathematics*, *11*(10). https://doi.org/10.3390/math11102368

Kotschote, M. (2008). Strong solutions for a compressible fluid model of Korteweg type. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Analyse Non Lineaire*, *25*(4), 679–696. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2007.03.005

Liu, J., Landis, C. M., Gomez, H., & Hughes, T. J. R. (2015). Liquid–vapor phase transition: Thermomechanical theory, entropy stable numerical formulation, and boiling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *297*, 476–553. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.09.007

Saito, H. (2019). *Existence of $\mathcal{R}$-bounded solution operator families for a compressible fluid model of Korteweg type on the half-space*. http://arxiv.org/abs/1901.06461

Suma'inna. (2018). The existence of *$\mathcal{R}$-bounded* solution operators of the thermoelastic plate equation with Dirichlet boundary conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *41*(4), 1578–1599. https://doi.org/10.1002/mma.4687