PERSAMAAN GARIS SINGGUNG KURVA BENTUK TELUR HUGELSCHAFFER

Rizky Darmawan
Akademi Farmasi Surabaya, Jl.Ketintang Madya 81, Surabaya
rizky.d76@gmail.com

Abstrak

Kurva bentuk telur Hugelschaffer adalah kurva bentuk telur yang dikonstruksi dari dua buah lingkaran tidak sepusat menggunakan transformasi Newton yang diketahui sebagai *hyperbolism*. Persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer merupakan persamaan sederhana yang merepresentasikan garis tepi telur asli jika dibanding persamaan kurva bentuk telur lainnya. Dilain pihak, persamaan garis singgung suatu kurva merupakan topik analisis yang banyak dibahas dalam dunia pendidikan matematika terkait irisan kerucut, seperti persamaan garis singgung lingkarang dan persamaan garis singgung elips. Pembahasan mengenai persamaan garis singgung kurva telur Hugelschaffer belum pernah dilakukan. Oleh karena itu pada tulisan ini didapatkan persamaan garis singgung pada kurva bentuk telur Hugelschaffer.

Kata Kunci: kurva bentuk telur Hugelschaffer, persamaan garis singgung

Abstract

Hugelschaffer’s egg shaped curve is egg shaped curve that is constructed by non-concentric two circles using Newton’s transformation known as hyperbolism. The equation of Hugelschaffer’s egg shaped curve is simple equation that represent the edge of real egg compared to the other egg shaped curves. On other hand, tangent equation of curve is the topical of analysis that is discussed often in mathematical education related to cone slices like tangent equation of circle and tangent equation of ellips. Study about tangent equation of Hugelschaffer’s egg shaped curve have never been done. Therefore in this paper will be obtained tangent equation of Hugelschaffer’s egg shaped curve.

Keywords: Hugelschaffer’s egg shaped curve, smooth curve, tangent equation

Pendahuluan

Kurva bentuk telur yang diusulkan oleh matematikawan Jerman Fritz Hugelschaffer merupakan suatu kurva tertutup yang merepresentasikan garis tepi dari telur dan lebih sering disebut kontruksi kurva bentuk telur Hugelschaffer (Obradovic, dkk., 2013). Ide dasar dari proses konstruksi kurva bentuk telur Hugelschaffer adalah prosedur konstruktif transformasi Newton yang dilakukan terhadap dua lingkaran tidak sepusat, yang disebut *hyperbolism (Petrovic dan Obradovic, 2010).*

Terkait dengan kurva-kurva bentuk telur, terdapat sejumlah artikel yang telah membahas mengenai kurva bentuk telur, diantaranya kurva bentuk telur yang diusulkan oleh Descartes, dan Cassini (Nishiyama, 1986). Secara matematis kurva bentuk telur Hugelschaffer memiliki persamaan yang paling unik dan sederhana dibanding persamaan kurva telur lainnya, yaitu suatu persamaan bentuk ellips yang terditorsi. Disamping itu, kurva bentuk telur Hugelschaffer dapat diterapkan pada desain struktur geometri arsitektur bangunan The National Centre for the Performing Arts di Beijing, The Gherkin, dan London City Hall (Petrovic, dkk, 2011) dan pada alat pengeras suara (Nishiyama, 1986). Penelitian lanjutan mengenai kurva bentuk telur Hugelschaffer dilakukan oleh Maulana dalam (Maulana, 2015) untuk mendapatkan permukaan bentuk telur tiga dimensi menggunakan kurva bentuk telur Hugelschaffer.

Dilain pihak, garis singgung memiliki peranan penting dalam matematika terapan terkait laju perubahan suatu benda. Persamaan garis singgung juga sering menjadi topik analisis yang dibahas dalam berbagai irisan kerucut di sekolah-sekolah seperti persamaan garis singgung lingkaran dan persamaan garis singgung ellips (Anton, 1999).

Pembahasan mengenai persamaan garis singgung dari kurva bentuk telur Hugelschaffer belum pernah dilakukan, oleh karena itu pada tulisan ini didapatkan persamaan garis singgung dari kurva bentuk telur Hugelschaffer. Permasalahan pada tulisan ini dibatasi oleh asumsi bahwa titik singgung antara garis singgung dengan kurva bentuk telur Hugelschaffer telah diketahui.

Gradient garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer diperoleh dengan melakukan differensial pada persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer, lalu nilai absis titik singgung dimasukkan kedalam hasil differensial tersebut sehingga diperoleh nilai gradient garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer, selanjutnya memasukkan gradient tersebut kedalam persamaan garis singgung yang diketahui melalui dua titik singgung sehingga didapatkan persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer.

Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian studi literatur, yaitu penelitian yang terlebih dahulu mengkaji teori-teori yang menjadi dasar permasalahan yang hendak diteliti dari berbagai jurnal dan buku, selanjutnya dari hasil pengkajian tersebut membuat konsep atau teori yang menjawab permasalahan yang diteliti. Secara umum langkah-langkah dalam penelitian ini adalah :

1. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengkaji mengenai persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer dalam (Obradovic, dkk., 2013). Pada tahap ini dibahas sekilas

mengenai karakteristik geometri kurva bentuk telur Hugelschaffer berdasarkan persamaan kurvanya.

2. Langkah berikutnya, mengubah persamaan (1) menjadi fungsi $y = f(x)$ atau y fungsi dalam x, dengan kata lain y adalah variable bergantung dan x adalah variable bebas.
3. Selanjutnya, mendapatkan turunan fungsi dari $f(x)$, yaitu $f'(x)$.
4. Lalu menghitung nilai gradient garis singgung (m) kurva bentuk telur dari perhitungann $m = f'(p)$ dari (Anton, 1999), dimana p adalah absis dari titik singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer.

5. Langkah terakhir, mendapatkan persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer dari rumus persamaan garis singgung (Anton, 1999), yaitu

$$y - q = m(x - p) \qquad (1)$$

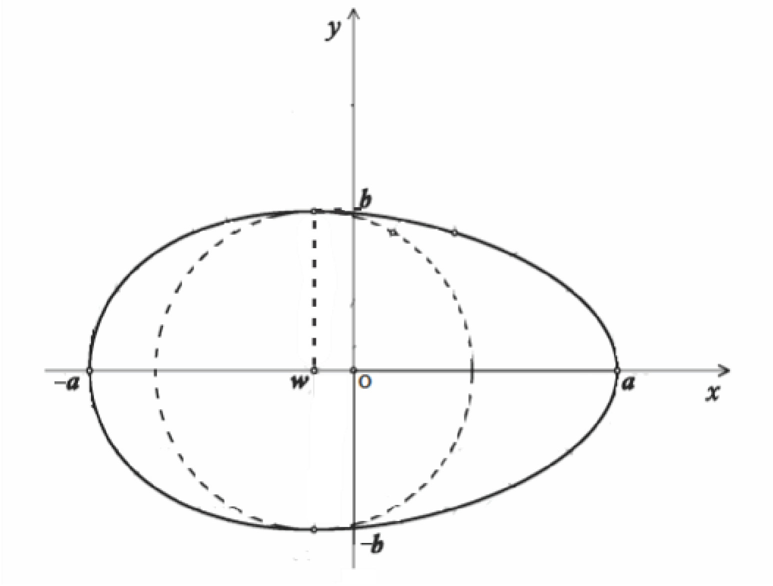
dimana m adalah gradient garis singgung yang telah dihitung pada langkah 4, dan (p, q) adalah titik singgung garis dari kurva bentuk telur Hugelschaffer.

Hasil dan Pembahasan

Persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer adalah persamaan yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{2wx + w^2}{a^2}\right) = 1 \qquad (2)$$

dimana $a, b,$ dan w adalah konstanta memenuhi $0 < b < a$ dan $0 < |w| < a$.
Secara visual, kurva bentuk telur Hugelschaffer dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Pada gambar kurva bentuk telur Hugelschaffer di atas, nilai $2a$ sama dengan panjang sumbu mayor, sedangkan nilai $2b$ sama dengan panjang sumbu minor atau panjang jari-jari lingkaran kecil dalam kurva bentuk telur Hugelschaffer, adapun nilai w menyatakan nilai absis pusat lingkaran kecil dalam kurva bentuk telur Hugelschaffer. Nilai w merupakan parameter kelengkungan, karena berperan dalam menentukan kelengkungan kurva bentuk telur. Pada gambar tersebut terlihat bahwa sumbu mayor berada pada sumbu x dan sumbu minor berada pada sumbu y.

Persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer yang dinyatakan dalam persamaan (2) harus diubah kedalam bentuk $y = f(x)$ sehingga menjadi

Gambar 1. Kurva bentuk telur Hugelschaffer

$$y = f(x) = b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + w^2 + 2wx}} \qquad (3)$$

Persamaan (3) di atas adalah persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer yang dinyatakan dalam bentuk fungsi $y = f(x)$.

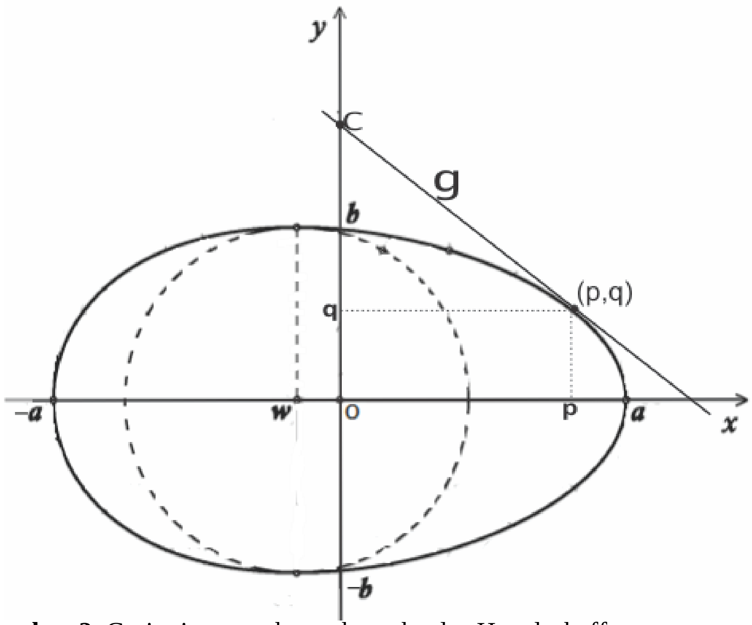
Turunan dari $f(x)$ pada persamaan (3) adalah

$$f'(x) = -b\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + w^2 + 2wx}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(w + x)(wx + a^2)}{(a^2 + w^2 + 2wx)^2}$$

$$= -b\frac{(w + x)(wx + a^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 + w^2 + 2wx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = -b\frac{(w + x)(wx + a^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 + w^2 + 2wx)^3}} \qquad (4)$$

Selanjutnya, misalkan garis g adalah garis yang menyinggung kurva bentuk telur Hugelschaffer pada titik (p, q) dan C adalah ordinat titik potong garis singgung dengan sumbu y seperti pada gambar berikut.



Gambar 2. Garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer

Nilai gradient (m) garis singgung g tersebut dapat dihitung dengan mensubstitusi nilai absis titik singgung p ke dalam (4), sehingga

$$m = -b\frac{(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}} \qquad (5)$$

Berdasarkan rumus persamaan garis singgung yang melalui suatu titik, substitusi nilai m pada (5) ke dalam (1), sehingga diperoleh persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer yang melalui titik (p, q) sebagai berikut.

$$y - q = \left(-b\frac{(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}}\right)(x-p)$$

maka

$$y = \left(-b\frac{(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}}\right)(x-p) + q \qquad (6)$$

untuk memudahkan penulisan dan memperlihatkan titik potong garis singgung dengan sumbu y, maka persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer pada (6) dapat juga ditulis dalam bentuk umum persamaan garis sebagai berikut

$$y = m\,x + C \qquad (7)$$

dimana m adalah gradient garis singgung dan C adalah ordinat titik potong garis singgung dengan sumbu y yang berupa

$$m = -\frac{b(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}}$$

$$C = \frac{b\,p\,(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}} + q$$

Berikut diberikan contoh untuk memperjelas hasil dari penelitian ini.

Contoh. Diberikan persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer sebagai berikut

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\left(1 - \frac{4x + 4^2}{16}\right) = 1$$

Kurva tersebut disinggung garis di titik dengan nilai absis 1. Dapatkan persamaan garis singgungnya !

Penyelesaian : Terlebih dahulu perlu diperoleh nilai ordinat titik singgung, yaitu dengan mensubstitusikan $x = 1$ pada persamaan kurva bentuk telur.

$$\frac{1^2}{16} + \frac{y^2}{9}\left(1 - \frac{4 \cdot 1 + 4}{16}\right) = 1$$

maka diperoleh $y = \frac{3}{4}\sqrt{30}$, sehingga titik singgungnya adalah $\left(1, \frac{3}{4}\sqrt{30}\right)$. Selanjutnya, persamaan kurva bentuk telur Hugelschaffer di atas dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2}\left(1 + \frac{2(-2)x + (-2)^2}{4^2}\right) = 1$$

maka nilai $a = 4$, $b = 3$, dan $w = -2$, sehingga berdasarkan (7), gradient garis singgung (m) dan ordinat titik potong garis singgung dengan sumbu y atau C, berturut-turut adalah

$$m = -\frac{3(-2+1)\big((-2)1 + 4^2\big)}{\sqrt{(4^2 - 1^2)(4^2 + (-2)^2 + 2(-2)1)^3}}$$

$$= \frac{42}{\sqrt{61440}}$$

$$= \frac{7}{10240}\sqrt{61440}$$

$$C = \frac{3(1)(-2+1)\left((-2)1+4^2\right)}{\sqrt{(4^2-1^2)(4^2+(-2)^2+2(-2)1)^3}} + \frac{3}{4}\sqrt{30}$$

$$= -\frac{42}{\sqrt{61440}} + \frac{3}{4}\sqrt{30}$$

$$= -\frac{7}{10240}\sqrt{61440} + \frac{3}{4}\sqrt{30}$$

Jadi persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer tersebut di atas dengan absis titik singgung $x = 1$ adalah

$$y = \frac{7}{10240}\sqrt{61440}\ x - \frac{7}{10240}\sqrt{61440} + \frac{3}{4}\sqrt{30}$$

Simpulan dan Saran

Persamaan garis singgung kurva bentuk telur Hugelschaffer pada titik singgung (p, q) adalah

$$y = m\,x + C$$

dimana m dan C berturut-turut adalah gradient garis singgung dan ordinat titik potong garis singgung dengan sumbu y , yang dinyatakan dengan

$$m = -\frac{b(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}}$$

$$C = \frac{b\,p\,(w+p)(wp+a^2)}{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2+w^2+2wp)^3}} + q$$

dengan nilai $2a, 2b,$ dan w berturut-turut adalah panjang sumbu mayor, panjang sumbu minor, dan parameter kelengkungan dari kurva bentuk telur Hugelschaffer.

Referensi

Anton, H. 1999. *Calculus, A New Horizon, 6th Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Maulana, Rif'an, A., Yunus, M., Sulistyaningrum, Dwi, R.,. 2015. *The Constructions of Egg-Shaped Surface Equations Using Hugelschaffer's Egg-Shaped Curve*. Indonesian Journal of Physics Volume 26, Nomor 2, Desember 2015, eISSN: 0854-6878.

Nishiyama, Y.,. 1986. *The Mathematics of Egg-Shaped*. Department of Business Information, Faculty of Information Management, Osaka University of Economics, Osaka, Japan.

Obradovic, M., Malesevic, B., Petrovic, M., Djukanovic, G.,. 2013. *Generating Curves of Higher Order Using the Generalisation of Hugelschaffer's Egg Curve Construction*. Politehnica, University of Timisora, Faculty of Civil Engineering, Timisora, Romania, pp.110-115.

Petrovic, M., Obradovic, M., Petrovic, M., Mijailovic, R.,. 2011. *Suitability Analysis of Hugelschaffer's Egg Curve Application in Architecture Structure's Geometry*. Buletinul Instutului Politehnic din Iasi, Universitatea Tehnica Gheorghe Asachi, Vol. 3, pp. 115-122.

Petrovic, M., dan Obradovic, M., Petrovic, M.,. 2010. *The Complement of the Hugelschaffer's Cosntruction of the Egg Curve*. Proceeding 25th National and 2nd International Scientific Conference, MonGeometrija 2010, Eds: Miodrag Nestorovic, Faculty of Civil Engineering and Architecture in Nis Serbian Society for Geometry and Graphic SUGIG, Vlasina, Serbia, pp.520-531.