

APROKSIMASI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL OSILATOR FRAKSIONAL MENGUNAKAN METODE ANALISIS HOMOTOPI LAPLACE

Nirbhaya Salsabila¹, Endang Rusyaman², Eddy Djauhari³
^{1,2,3}Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21, Sumedang
¹nirbhaya16001@mail.unpad.ac.id

Abstrak

Persamaan diferensial fraksional telah menarik banyak ahli untuk meneliti lebih dalam karena sangat membantu dalam pemodelan berbagai masalah, seperti persamaan diferensial osilator fraksional. Telah banyak metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut, diantaranya Metode Analisis Homotopi Laplace yang merupakan gabungan dari Transformasi Laplace dan Metode Analisis Homotopi. Penulis menggunakan metode ini untuk mencari solusi persamaan diferensial osilator fraksional nonlinier sehingga diperoleh bahwa saat barisan orde dari persamaan diferensial osilator fraksional konvergen ke suatu bilangan maka barisan fungsi solusinya konvergen ke fungsi solusi dengan orde bilangan tersebut, serta metode yang digunakan memiliki tingkat akurasi yang sangat baik.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Osilator Fraksional; Metode Analisis Homotopi Laplace; Kekonvergenan

Abstract

Fractional differential equation has attracted many experts to research more deeply because it is very helpful in modeling various problems, such as fractional oscillator differential equations. There have been many methods used to solve this problem, including the Laplace Homotopy Analysis Method which is a combination of the Laplace Transform and the Homotopy Analysis Method. The author uses this method to find solutions to nonlinear fractional oscillator differential equations so that when the order sequence of the fractional oscillator differential equation converges to a number, then the sequence of the solution function converges to the solution function where the order is the number itself, and the method used has a level very good accuracy.

Keywords: Fractional Oscillator Differential Equations; Laplace Homotopy Analysis Method; Convergence

Pendahuluan

Perkembangan zaman dan teknologi yang begitu pesat tak bisa lepas dari ilmu pengetahuan. Telah banyak ilmuwan yang melakukan penelitian di berbagai bidang sehingga menghasilkan penemuan baru yang dapat mempermudah kehidupan manusia sehari-hari. Salah satu bidang ilmu pengetahuan yang memiliki peran paling penting dalam kehidupan adalah matematika, induk dari bidang ilmu pengetahuan. Matematika dapat diterapkan untuk membantu memecahkan masalah yang ada di bidang ilmu lain. Terdapat beberapa cabang yang dipelajari dalam bidang matematika, yaitu kalkulus, aljabar, geometri, dan lainnya.

Kalkulus dapat dibagi menjadi beberapa cabang, salah satunya persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui, diferensial biasa atau derivatif (turunan) biasa dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial umumnya memiliki orde yang berbentuk bilangan asli, namun ilmu pengetahuan yang terus berkembang menghasilkan variasi baru dalam persamaan diferensial, yaitu orde berbentuk pecahan atau disebut persamaan diferensial fraksional.

Persamaan diferensial fraksional telah menarik perhatian para ahli matematika untuk diteliti lebih lanjut karena berhasil memecahkan berbagai masalah dalam berbagai bidang. Permasalahan kompleks dalam ilmu sains dan teknologi dapat diselesaikan dengan menerapkan persamaan diferensial fraksional diantaranya viskoelastisitas (Rusyaman, Chaerani, & Parmikanti, 2017), mekanika, teknik, gelombang, dan sebagainya (Mainardi, 1997).

Persamaan diferensial fraksional juga dapat memodelkan permasalahan lain seperti persamaan osilator. Persamaan diferensial osilator fraksional telah berhasil diselesaikan menggunakan beberapa metode diantaranya metode dekomposisi (Ibrahim & Momani, 2007), Rayleigh-Ritz Method (Blaszczyk, 2009), metode transformasi diferensial (Al-Rabtah, Erturk, & Momani, 2010), Metode Analisis Homotopi Laplace (Zurigat, 2011), dan Metode Pertubasi Homotopi (Yildirim & Momani, 2012).

Dalam penelitian ini, akan digunakan Metode Analisis Homotopi Laplace (Zurigat, 2011) untuk menyelesaikan persamaan diferensial osilator fraksional linear dan nonlinear. Pada skripsi ini penulis akan menyelesaikan persamaan diferensial fraksional berbentuk nonlinear dengan menerapkan Metode Analisis Homotopi Laplace pada persamaan diferensial silator fraksional (Barari, Omidvar, Ghotbi, & Ganji, 2008). Selanjutnya dilakukan analisis kekonvergenan barisan fungsi solusi dan mencari tingkat akurasi solusi pendekatan terhadap solusi eksak persamaan diferensial osilator fraksional dengan menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

Metode Penelitian

Metode Analisis Homotopi telah memberikan solusi pendekatan analitik yang diterapkan pada berbagai masalah nonlinear. Pada penelitian ini akan disajikan modifikasi Metode Analisis Homotopi dengan menggunakan transformasi Laplace atau disebut Metode Analisis Homotopi Laplace.

Diberikan sebuah persamaan diferensial fraksional berikut

$$D_*^\alpha u(t) - g(t, u(t), u'(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (1)$$

dengan kondisi awal

$$u(0) = a, \quad u'(0) = b.$$

Langkah pertama adalah menentukan operator linear tambahan L yaitu

$$L[\phi(t; q)] = D_*^\alpha \phi(t; q)$$

dimana $\phi(t; q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dari variabel bebas t dan q . Selain itu, ditentukan pula operator linear N berikut

$$N[u(t)] = D_*^\alpha u(t) - g(t, u(t), u'(t)) = 0.$$

Dengan menerapkan transformasi *Laplace* pada persamaan (1) diperoleh $\mathcal{L}[D_*^\alpha u(t) - g(t, u(t), u'(t))] = 0$.

$$s^\alpha \tilde{u}(s) - s^{\alpha-1}a - s^{\alpha-2}b - \mathcal{L}[g(t, u(t), u'(t))] = 0.$$

$$\tilde{u}(s) - \frac{a}{s} - \frac{b}{s^2} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[g(t, u(t), u'(t))] = 0.$$

$$\text{dimana } \mathcal{L}[u(t)] = \tilde{u}(s). \tag{2}$$

Berdasarkan Metode Analisis Homotopi, persamaan deformasi orde ke-nol dinyatakan sebagai

$$(1 - q)L[\phi(x; q) - u_0(x)] = qhH(x)N[\phi(x; q)].$$

Dari persamaan (2), dapat dibentuk persamaan deformasi orde ke-nol dari persamaan (1) yaitu

$$(1 - q)L[\tilde{\phi}(s; q) - \tilde{u}_0(s)] = qh \left\{ \tilde{\phi}(s; q) - \frac{a}{s} - \frac{b}{s^2} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[g \left(t, \phi(t; q), \frac{d}{dt} \phi(t; q) \right) \right] \right\} \tag{3}$$

dimana $q \in [0,1]$ adalah parameter homotopi, $h \neq 0$ adalah parameter tambahan, $\tilde{u}_0(s)$ merupakan tebakan awal dari $\tilde{u}(s)$ dan $\tilde{\phi}(s; q)$ merupakan fungsi yang tak diketahui.

Kemudian dengan menyubstitusi $q = 0$ pada persamaan (3) maka diperoleh $\tilde{\phi}(s; 0) = \tilde{u}_0(s)$, sedangkan untuk $q = 1$ diperoleh $\tilde{\phi}(s; 1) = \tilde{u}(s)$. Karena $q \in [0,1]$ maka q terus meningkat dari 0 ke 1 sehingga dapat dinyatakan bahwa $\tilde{\phi}(s; q)$ bervariasi dari $\tilde{u}_0(s)$ ke $\tilde{u}(s)$. Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi deret Taylor pada $\tilde{\phi}(s; q)$ terhadap q di sekitar $q = 0$ didapat

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(s; q) &= \tilde{u}_0(s) + \frac{\tilde{\phi}'(s; q)}{1!}q + \frac{\tilde{\phi}''(s; q)}{2!}q^2 + \frac{\tilde{\phi}'''(s; q)}{3!}q^3 + \dots \Big|_{q=0} \\ &= \tilde{u}_0(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \tilde{\phi}(s; q)}{\partial q^m} q^m \Big|_{q=0}. \end{aligned}$$

Dengan memisalkan

$$\tilde{u}_m(s) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \tilde{\phi}(s; q)}{\partial q^m} q^m \Big|_{q=0} \tag{4}$$

maka didapat

$$\tilde{\phi}(s; q) = \tilde{u}_0(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_m(s) q^m \Big|_{q=0}. \quad (5)$$

Selanjutnya $\tilde{u}_m(s)$ dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (3) terhadap q sebanyak m kali kemudian menyubstitusikan $q = 0$ dan $h = -1$ ke persamaan (3). Setelah itu, persamaan dibagi dengan $m!$ sehingga diperoleh

$$\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \tilde{\phi}(s; q)}{\partial q^m} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \tilde{\phi}(s; q)}{\partial q^{m-1}} = -\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \tilde{\phi}(s; q)}{\partial q^{m-1}} + \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left\{ \mathcal{L} \left[g \left(t, \phi(t; q), \frac{d}{dt} \phi(t; q) \right) \right] \right\} \Big|_{q=0}. \quad (6)$$

Dengan menggunakan persamaan (4), maka persamaan (6) dapat ditulis sebagai

$$\tilde{u}_m(s) = \chi_m \tilde{u}_{(m-1)}(s) - \tilde{u}_{(m-1)}(s) + \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left\{ \mathcal{L} \left[g \left(t, \phi(t; q), \frac{d}{dt} \phi(t; q) \right) \right] \right\} \Big|_{q=0} \quad (7)$$

Didefinisikan vektor

$$\vec{\tilde{u}}_m(s) = \{\tilde{u}_0(s), \tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s), \dots, \tilde{u}_m(s)\}.$$

Dari persamaan (7), diperoleh persamaan deformasi orde ke- m , yaitu

$$\tilde{u}_m(s) = \chi_m \tilde{u}_{(m-1)}(s) - R_m(\vec{\tilde{u}}_{m-1}(s))$$

dimana

$$R_m(\vec{\tilde{u}}_{m-1}(s)) = \tilde{u}_{(m-1)}(s) - \frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left\{ \mathcal{L} \left[g \left(t, \phi(t; q), \frac{d}{dt} \phi(t; q) \right) \right] \right\} \Big|_{q=0} \right) - \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} \right) (1 - \chi_m)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}.$$

Selanjutnya dengan menentukan invers transformasi Laplace dari $\tilde{u}_m(s)$ diperoleh solusi dari persamaan diferensial fraksional adalah

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t).$$

Hasil dan Pembahasan

Persamaan diferensial yang digunakan pada penelitian adalah persamaan diferensial osilator fraksional nonlinear dengan bentuk berikut

$$D_*^\alpha u(t) + f(t, u(t), D_* u(t)) = 0$$

dengan $1 < \alpha \leq 2$, kondisi awal $u(0) = a$, $D_* u(0) = b$ dimana t adalah waktu, u adalah perpindahan suatu benda, a dan b adalah nilai kondisi awal.

Metode Analisis Homotopi Laplace akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial osilator fraksional berikut

$$D_*^\alpha u(t) - u(t) + u^2(t) + (u'(t))^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

dimana $1 < \alpha \leq 2$ dengan kondisi awal $u(0) = 2$ dan $u'(0) = 0$, memiliki solusi eksak $u(t) = 1 + \cos(t)$ untuk nilai $\alpha = 2$.

Langkah pertama adalah menentukan bentuk transformasi Laplace dari persamaan maka diperoleh

$$\tilde{u}(s) - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \left(-\tilde{u}(s) + \mathcal{L}[u^2(t)] + \mathcal{L}[(u'(t))^2] - \frac{1}{s} \right) = 0.$$

Kemudian dapat ditentukan bentuk persamaan deformasi orde ke-nol yaitu

$$(1 - q)[\tilde{\phi}(s; q) - \tilde{u}_0(s)] = qh \left\{ \tilde{\phi}(s; q) - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \left(-\tilde{\phi}(s; q) + \mathcal{L}[\phi^2(t; q)] + \mathcal{L} \left[\left(\frac{d}{dt} \phi(t; q) \right)^2 \right] - \frac{1}{s} \right) \right\}$$

Selanjutnya $\tilde{u}_m(s)$ dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan deformasi orde ke-nol terhadap q sebanyak m kali kemudian menyubstitusikan $q = 0$ dan $h = -1$ ke persamaan. Setelah itu, persamaan dibagi dengan $m!$ sehingga diperoleh

$$\tilde{u}_m(s) = \chi_m \tilde{u}_{(m-1)}(s) - R_m(\overrightarrow{\tilde{u}_{m-1}}(s))$$

dimana

$$R_m(\overrightarrow{\tilde{u}_{m-1}}(s)) = -\frac{2}{s} (1 - \chi_m) + \tilde{u}_{(m-1)}(s) - \frac{1}{s^\alpha} \tilde{u}_{(m-1)}(s) + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^{m-1} u_i(t) u_{m-1-i}(t) \right] + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^{m-1} u'_i(t) u'_{m-1-i}(t) \right] + \frac{1}{s^{\alpha+1}} (1 - \chi_m)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Dengan demikian, solusi persamaan diferensial osilator fraksional adalah

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) + \dots \\
 &= 2 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{3 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{9 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{(\Gamma(\alpha + 1))^2 \Gamma(3\alpha + 1)} + \\
 &\quad - \frac{\alpha^2 \Gamma(2\alpha - 1)t^{3\alpha-2}}{(\Gamma(\alpha + 1))^2 \Gamma(3\alpha - 1)} + \frac{27 t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha)} + \frac{3\Gamma(2\alpha + 1)t^{4\alpha}}{(\Gamma(\alpha + 1))^2 \Gamma(4\alpha)} + \\
 &\quad + \frac{6\Gamma(3\alpha + 1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha)} + \frac{3\alpha^2 \Gamma(2\alpha - 1)t^{4\alpha-2}}{(\Gamma(\alpha + 1))^2 \Gamma(4\alpha - 1)} + \\
 &\quad + \frac{12\alpha^2 \Gamma(3\alpha - 1)t^{4\alpha-2}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha - 1)} + \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

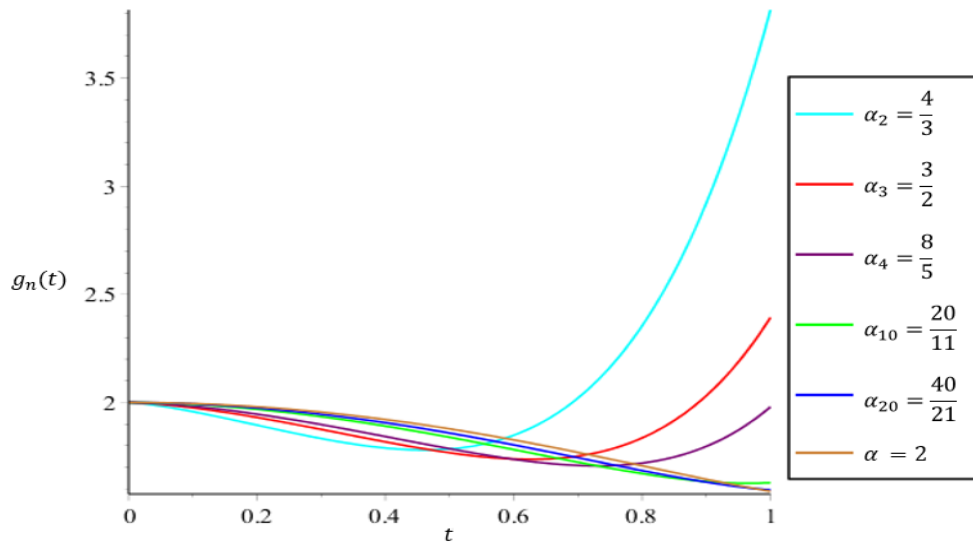
Selanjutnya akan ditunjukkan kekonvergenan barisan fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional orde (α_n) dimana (α_n) konvergen ke $\alpha = 2$ dengan memilih barisan $(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$.

Misalkan $g_n(t)$ barisan fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional orde (α_n) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 g_2(t) &= 2 - \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} + \frac{3 t^{\frac{8}{3}}}{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)} - \frac{9 t^4}{\Gamma(5)} - \frac{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)t^4}{\left(\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\right)^2 \Gamma(5)} - \frac{16\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)t^2}{9\left(\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\right)^2 \Gamma(3)} + \frac{27t^{\frac{16}{3}}}{\Gamma\left(\frac{16}{3}\right)} + \\
 &\quad + \frac{3\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)t^{\frac{16}{3}}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{16}{3}\right)} + \frac{6\Gamma(5)t^{4\left(\frac{4}{3}\right)}}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)\Gamma\left(\frac{16}{3}\right)} + \frac{16\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)t^{\frac{10}{3}}}{3\left(\frac{7}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{13}{3}\right)} + \frac{64\Gamma(3)t^{\frac{10}{3}}}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)} + \dots \\
 g_3(t) &= 2 - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{3 t^3}{\Gamma(4)} - \frac{9 t^{\frac{9}{2}}}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} - \frac{\Gamma(4)t^{\frac{9}{2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} - \frac{9\Gamma(2)t^{\frac{5}{2}}}{4\left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{27}{\Gamma(6)} t^6 + \\
 &\quad + \frac{3\Gamma(4)}{\left(\frac{7}{2}\right)^2 \Gamma(6)} t^6 + \frac{6\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(4)\Gamma(6)} t^6 + \frac{27\Gamma(2)}{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^4 + \frac{27\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)t^4}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(4)\Gamma(5)} + \dots \\
 g_4(t) &= 2 - \frac{t^{\frac{8}{5}}}{\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)} + \frac{3 t^{\frac{16}{5}}}{\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)} - \frac{9 t^{\frac{24}{5}}}{\Gamma\left(\frac{29}{5}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)t^{\frac{24}{5}}}{\left(\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{29}{5}\right)} - \frac{64\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)t^{\frac{14}{5}}}{25\left(\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)\right)^2 \Gamma\left(\frac{19}{5}\right)} + \frac{27t^{\frac{32}{5}}}{\Gamma\left(\frac{32}{5}\right)} + \\
 &\quad + \frac{3\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)t^{\frac{32}{5}}}{\left(\frac{13}{5}\right)^2 \Gamma\left(\frac{32}{5}\right)} + \frac{6\Gamma\left(\frac{29}{5}\right)t^{\frac{32}{5}}}{\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)\Gamma\left(\frac{32}{5}\right)} + \frac{192\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)t^{\frac{22}{5}}}{25\left(\frac{13}{5}\right)^2 \Gamma\left(\frac{27}{5}\right)} + \frac{768\Gamma\left(\frac{19}{5}\right)t^{\frac{22}{5}}}{25\Gamma\left(\frac{13}{5}\right)\Gamma\left(\frac{21}{5}\right)\Gamma\left(\frac{27}{5}\right)} + \dots \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) &= 2 - \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{3 t^4}{\Gamma(5)} - \frac{9}{\Gamma(7)} t^6 - \frac{\Gamma(5)}{(\Gamma(3))^2 \Gamma(37)} t^6 - \frac{4}{\Gamma(3)\Gamma(5)} t^4 + \frac{27}{\Gamma(8)} t^8 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\Gamma(5)}{(\Gamma(3))^2\Gamma(8)}t^8 + \frac{6\Gamma(7)}{\Gamma(3)\Gamma(5)\Gamma(8)}t^8 + \frac{60}{\Gamma(3)\Gamma(7)}t^6 + \dots \\
 & = g(t).
 \end{aligned}$$

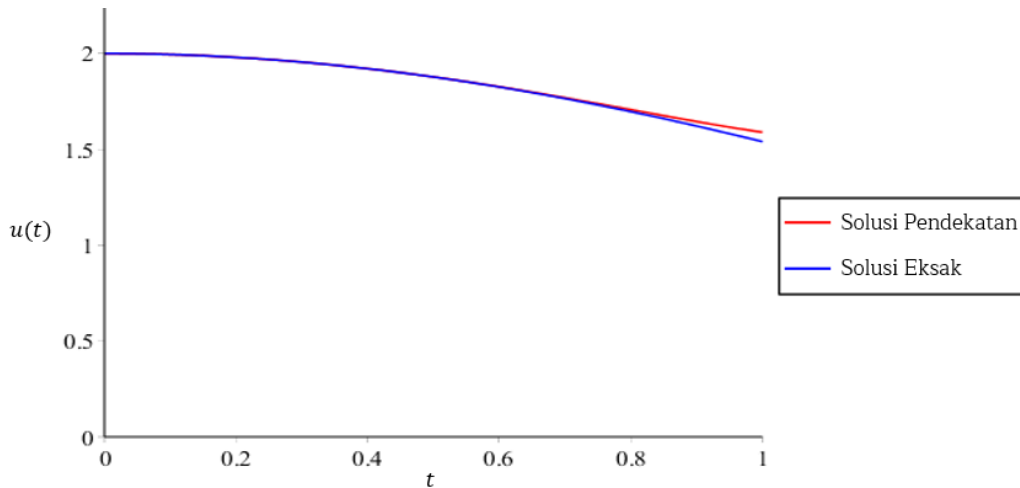
Grafik barisan fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional orde $(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$ untuk $0 \leq t \leq 1$ dapat dilihat pada gambar di bawah ini



Gambar 1. Grafik Barisan Fungsi Solusi Persamaan Diferensial Osilator Fraksional Orde $(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$

Berdasarkan grafik pada gambar 4.1 dapat dilihat bahwa pada $0 \leq t \leq 1$, barisan fungsi solusi dari persamaan diferensial osilator fraksional yang telah diurutkan berdasarkan besarnya α , yaitu $D_*^\alpha u(t) - u(t) + u^2(t) + (u'(t))^2 - 1 = 0$ akan konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial osilator, yaitu $D_*^2 u(t) - u(t) + u^2(t) + (u'(t))^2 - 1 = 0$. Dengan demikian, jika (α_n) konvergen ke α , maka barisan fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional berorde (α_n) juga akan konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial osilator orde α .

Diketahui persamaan diferensial osilator fraksional (8) dengan orde $1 < \alpha \leq 2$, kondisi awal $u(0) = 2$ dan $u'(0) = 0$, memiliki solusi eksak $u(t) = 1 + \cos(t)$ untuk nilai $\alpha = 2$, dan solusi pendekatan (9). Berikut adalah grafik solusi eksak dan solusi pendekatan persamaan diferensial osilator fraksional orde $\alpha = 2$ pada $0 \leq t \leq 1$



Gambar 2. Grafik Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak Persamaan Diferensial Osilator Fraksional Orde $\alpha = 2$, $0 \leq t \leq 1$.

Dari gambar 2 terlihat ada penyimpangan antara solusi pendekatan dan solusi eksak untuk orde $\alpha = 2$. Selanjutnya dapat dicari nilai *Absolute Percentage Error* (APE) untuk melihat akurasi dari solusi pendekatan terhadap solusi eksak untuk $\alpha = 2$.

Tabel 1. Tabel APE solusi pendekatan terhadap solusi eksak persamaan diferensial osilator

t	Solusi pendekatan (F_t)	Solusi eksak (A_t)	APE
0,1	1,995004188	1,995004165	0,000001152879799%
0,2	1,980068069	1,980066578	0,00007530049830%
0,3	1,955354445	1,955336489	0,0009183074167%
0,4	1,921169554	1,921060994	0,005651043894%
0,5	1,878034319	1,877582562	0,02406056645%
0,6	1,826821897	1,825335615	0,08142513562%
0,7	1,768999331	1,764842187	0,2355532994%
0,8	1,707021897	1,6969706709	0,6079535105%
0,9	1,644939559	1,621609968	1,438668451%
1,0	1,589285714	1,540302306	3,180116514%

$$MAPE = \frac{100\%}{10} \sum_{t=1}^N \frac{|A_t - F_t|}{A_t} = 0,5574423282\%$$

Dapat dilihat pada tabel 1 diperoleh galat dari hasil perhitungan menggunakan MAPE antara solusi pendekatan dan solusi eksak untuk $\alpha = 2$ pada $0 \leq t \leq 1$ adalah 0,5574423282%. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa solusi pendekatan persamaan diferensial osilator fraksional menggunakan Metode Analisis Homotopi Laplace dengan melakukan iterasi sebanyak empat kali dapat dikategorikan sangat baik pada $0 \leq t \leq 1$.

Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa persamaan diferensial osilator fraksional dapat dicari solusinya secara numerik dengan menggunakan

Metode Analisis Homotopi Laplace. Setelah melakukan analisis kekonvergenan, diperoleh jika (α_n) konvergen ke α , maka barisan fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional berorde α_n akan konvergen ke fungsi solusi persamaan diferensial osilator fraksional orde α . Tingkat akurasi solusi pendekatan persamaan diferensial osilator fraksional terhadap solusi eksak untuk orde $\alpha = 2$ termasuk ke dalam kategori sangat baik dengan perhitungan menggunakan MAPE memiliki nilai MAPE sebesar 0,5574423282%.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan penulis memiliki beberapa saran, yaitu mencari solusi persamaan diferensial osilator fraksional dengan $f(t, u(t), D_*u(t))$ bentuk lain seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan lain-lain. Selain itu, dapat pula dicari solusinya menggunakan metode lain sehingga dapat dibandingkan kekonvergenan dan tingkat akurasinya.

Referensi

- Al-Rabtah, A., Erturk, V. S., & Momani, S. 2010. Solutions of a Fractional Oscillator by Using Differential Transform Method. *Computers & Mathematics with Applications*, 1356-1362.
- Barari, A., Omidvar, A., Ghotbi, A. R., & Ganji, D. D. 2008. Application of Homotopy Perturbation Method and Variational Iteration Method to Nonlinear Oscillator Differential Equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 161-171.
- Blaszczyk, T. 2009. Application of the Rayleigh-Ritz Method for Solving Fractional Oscillator Equation. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 29-36.
- Ibrahim, R., & Momani, S. 2007. Analytical Solutions of A Fractional Oscillator by the Decomposition Method. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 119-131.
- Liao, S. 1992. *The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems*. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University.
- Liao, S. 1998. Application of Homotopy Analysis Method in Nonlinear Oscillations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 914-922.
- Mainardi, F. 1997. Fractional Calculus: some Basic Problem in Continuum and Statistical Mechanics. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, 291-348.
- Rusyaman, E., Chaerani, D., & Parmikanti, K. 2017. Fractional Differential Equation as a Models of Newton Fluids for Stress and Strain Problems. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, 241-246.
- Yildirim, A., & Momani, S. 2012. Series Solutions of Fractional Oscillator by Means of the Homotopy Perturbation Method. *International Journal of Computer Mathematics*, 13-20.

Zurigat, M. 2011. Solving Fractional Oscillators Using Laplace Homotopy Analysis Method. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 1-11.