# MODEL DINAMIK KONTROL OPTIMAL PREDATOR-PREY DENGAN RESPON FUNGSIONAL *BEDDINGTON - DE ANGELIS* PADA TANAMAN PADI

Renny[1], Rina Reorita[2]
[1,2]Universitas Jenderal Soedirman, Jl. Prof. DR. HR Boenyamin No.708, Purwokerto
[1]renny@unsoed.ac.id

**Abstrak**

Pada penelitian ini akan digunakan model *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington-De Angelis yang dikembangkan oleh Prasad , namun dengan memberikan suatu kontrol optimal pada model sehingga diharapkan pengendalian terhadap *predator* tidak akan memberikan dampak negatif bagi lingkungan. Kontrol optimal yang digunakan adalah dengan menggunakan teori *bang-bang control* dan *singular control*. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mencari penyelesaian analitik model kontrol optimal *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington-De Angelis pada tanaman padi dan lahan persawahan. Hasil simulasi model menunjukkan bahwa dengan menggunakan *bang-bang control* dan *singular control*, diperoleh bahwa model dinamik kontrol optimal *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington de-Angelis dengan pemberian kontrol berupa pemberian pestisida kepada hama tanaman di lahan persawahan akan mempercepat penurunan proporsi jumlah hama yang ada dan juga berpengaruh terhadap proporsi tanaman padi yang ada.

**Kata Kunci:** Model matematika; *Predator-prey*, *singular-control*; B*ang-bang Control*; Persamaan diferensial

**Abstract**

In this research, the predator-prey model with the Beddington-De Angelis functional response developed by Prasad will be used, but by providing an optimal control on the model so that it was expected that predators will not have a negative impact to the environment. The optimal control used was by using bang-bang control theory and singular control. The purpose of this research was to find an analytical solution for the optimal control model of predator-prey with Beddington-De Angelis functional response in rice and paddy fields. The model simulation results show that by using bang-bang control and singular control, it was found that the optimal control dynamic model of predator-prey with Beddington de-Angelis functional response by giving control in the form of giving pesticides to plant pests in rice fields will accelerate the decrease in the proportion of the number of pests that were affected. exist and also affects the proportion of existing rice plants.

**Keywords:** Mathematical model; Predator-prey; Singular-control; Bang-bang control, Differential equation

**Pendahuluan**

Hubungan antara tanaman padi dan OPT dapat dibentuk menjadi suatu model matematika, yaitu model *predator-prey*. Model *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model *predator-prey* sering disebut sebagai model Lotka-Volterra (Boyce & DiPrima, 2017). Padi merupakan komoditas tanaman pangan penghasil beras yang memegang peranan penting dalam kehidupan ekonomi Indonesia (Donggulo et al., 2017). Dalam pertumbuhannya, tanaman padi memerlukan unsur Nitrogen (N) dan Fosfor (P) sebagai unsur hara makro yang sangat dibutuhkan oleh tanaman dalam jumlah yang besar. Kedua unsur ini sangat berguna untuk pertumbuhan dan perkembangan tanaman, dan salah satunya adalah tanaman padi (Brady, N.C. dan Weil, 2016). Pemahaman efisiensi penggunaan nitrogen pada tanaman padi perlu diketahui agar dapat meningkatkan hasil gabah dan mengurangi polusi lingkungan akibat pemakaian pupuk N yang berlebihan (Triadiati et al., 2012). Dari hasil penelitian yang dilakukan oleh (Renny dan Rina Reorita, 2019) tentang efisiensi penggunaan nitrogen sebagai salah satu unsur hara makro yang sangat penting bagi tanaman padi, telah diperoleh hasil tentang kaitan efisiensi penggunaan nitrogen dengan keseimbangan unsur hara makro didalam tanah. Namun dalam penelitian tersebut belum melibatkan faktor tingkat kesuburan tanah dan hubungannya dengan tingkat keberhasilan tanam dan pemanenan pada lahan persawahan. Semakin besar tingkat kesuburan tanah, akan semakin besar pula tingkat keberhasilan tanam. Namun walaupun demikian, tingkat keberhasilan pemanenan dapat terganggu akibat terdapatnya organisme pengganggu tanaman (OPT), sehingga mengancam keberhasilan panen tanaman padi.

Organisme Pengganggu Tanaman (OPT) adalah semua organisme yang mengganggu pertumbuhan tanaman pokok, dalam hal ini tanaman padi, yang dapat menimbulkan kerusakan pada tanaman padi dan menimbulkan kerugian bagi petani. Pengendalian OPT adalah upaya manusia untuk menekan besarnya populasi OPT sampai batas yang tidak menimbulkan kerusakan pada tanaman padi dan mendatangkan kerugian bagi petani yang melakukan usaha tani padi tersebut (Kartohardjono, A., Kertoseputo, D., Suryana, n.d.). Organisme Penganggu Tanaman secara garis besar dapat dibagi menjadi tiga, yaitu hama, penyakit dan gulma. Hama wereng batang coklat (WBC) dan hama tikus sawah merupakan hama yang sering menyerang tanaman padi (Wibowo T.B dan Sutikno, 2016).

Matematika sebagai ilmu dasar dapat digunakan sebagai jembatan penghubung antar berbagai bidang ilmu, salah satunya adalah bidang pertanian. Dengan menggunakan pemodelan matematika, dapat dilakukan analisis model matematis *predator-prey* pada tanaman padi, dimana permasalahan nyata yang muncul dapat dibuat dalam sebuah model matematis berdasarkan formulasi masalah nyata yang dihadapi. Hubungan komponen-komponen dalam masalah nyata yang dirumuskan kedalam suatu model matematis dapat digunakan untuk memprediksi kejadian yang akan muncul dari sebuah fenomena, sehingga diharapkan dapat digunakan sebagai dasar perencanaan dan kontrol dalam pembuatan kebijakan, yang dalam hal ini adalah kontrol terhadap OPT.

Penelitian dari (Korobeinikov & Wake, 2000) telah mengembangkan model Lotka-Volterra dengan melibatkan dua *predator* dan satu *prey*. Pada penelitian ini akan digunakan model *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington-De Angelis yang dikembangkan oleh (Prasad et al., 2013), namun dengan menggunakan dua *predator* dan memberikan suatu kontrol optimal pada model sehingga diharapkan pengendalian terhadap OPT (*predator*) tidak akan memberikan dampak negatif bagi lingkungan. Kontrol optimal yang digunakan adalah dengan menggunakan teori singular kontrol dan *bang-bang control.*

**Metode Penelitian**

Penelitian ini bersifat pengembangan keilmuan dengan hasil kajiannya berupa konstruksi model matematika yang mempunyai nilai aplikasi tinggi. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik, diantaranya adalah (1) mendefinisikan model dari penelitian; (2) mendefinisikan fungsi tujuan berupa persamaan diferensial untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal; (3) menentukan batas kontrol optimal dengan menggunakan *Bang-bang control*; (3) melakukan simulasi numerik. Subjek penelitian adalah pemodelan kontrol optimal *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington-De Angelis pada tanaman padi dan lahan persawahan. Sementara itu, yang menjadi objek penelitian adalah usaha untuk menggambarkan prediksi secara matematik pengaruh kontrol optimal *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington-De Angelis pada tanaman padi dan lahan persawahan. Dalam simulasi dilakukan dengan bantuan *software* MATLAB berupa gambaran dinamika pada populasi tanaman padi dan populasi hama tanaman dengan adanya pemberian kontol pestisida.

**Hasil dan Pembahasan**

Pada dinamika populasi, respon fungsional menyatakan tingkat predasi *prey* oleh *predator*. Beddington dan De Angelis telah memodifikasi respon fungsional Holling yang menyarankan bahwa laju predasi akan lebih realistis apabila laju predasi tersebut juga bergantung pada spesies predator dan lingkungan yang menyediakan perlindungan bagi *prey*. Asumsi yang digunakan pada penelitian ini diantaranya adalah:

1. Populasi predator dan *prey* bersifat tertutup, artinya tidak ada predator dan *prey* yang melakukan migrasi.
2. Terjadi interaksi antara predator dan *prey*.
3. Pemanenan hanya terjadi pada populasi *prey*.
4. Apabila tidak ada interaksi antara predator dan *prey*, maka pertumbuhan *prey* mengikuti model logistik, yaitu dengan adanya keterbatasan daya dukung lingkungan sebesar $K$ dan tingkat pertumbuhan intrinsik $p$, sehingga laju pertumbuhan *prey* akan menjadi
$$\frac{dx}{dt} = px\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$
5. Laju pemangsaan diberikan dalam bentuk respon fungsional Beddington-de Angelis, yaitu sebesar $\frac{\alpha xy}{a+bx+cy}$ , dimana $\alpha$ adalah nilai maksimum pengurangan jumlah *prey* akibat pemangsaan predator, $a$ merupakan koefiesien daya dukung lingkungan untuk *prey*, sedangkan $b$ dan $c$ masing-masing merupakan konstanta.

   Sehingga laju pertumbuhan populasi *prey* berkurang terhadap predator, yaitu sebesar $\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha xy}{a+bx+cy}$
6. Koefisien dari daya dukung lingkungan terhadap *prey* dan *predator* berbeda.

**1. Pendefinisian Model**

Model yang digunakan pada penelitian ini adalah:

$$\frac{dx}{dt} = px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} - \mu ux \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta \alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y$$

dengan $x(t)$ menyatakan jumlah individu *prey* (padi) pada waktu *t* dan $y(t)$ menyatakan jumlah individu *predator* (hama wereng) pada waktu *t*.

Penyelesaian kualitatif sistem adalah dengan melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan untuk model *predator prey* pada sistem persamaan (1) diperoleh apabila $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Apabila $\frac{dx}{dt} = 0$, berlaku

$$px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a + bx + cy} - \mu ux = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(p\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a + bx + cy} - \mu u\right)x = 0$$

diperoleh $x = 0$ (2)

atau $p\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} - \mu u = 0.$ (3)

Jika $\frac{dy}{dt} = 0$ maka

$$\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy}-\gamma y=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\beta\alpha x}{a+bx+cy}-\gamma\right)y=0$$

diperoleh $y=0$ (4)

atau $\frac{\beta\alpha x}{a+bx+cy}-\gamma=0$ (5)

Sehingga didapatkan $TE_1(x,y)=(0,0)$. Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (5), didapatkan

$$p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha y}{a+bx+cy}-\mu u=0$$
$$\Leftrightarrow p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha(0)}{a+bx+c(0)}-\mu u=0$$
$$\Leftrightarrow p\left(1-\frac{x}{K}\right)=\mu u$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{x}{K}=\frac{\mu u}{p}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{K}=1-\frac{\mu u}{p}$$
$$\Leftrightarrow x=k\left(1-\frac{\mu u}{p}\right)$$

Diperoleh $TE_2(x,y)=\left(k\left(1-\frac{\mu u}{p}\right),0\right)$. Dari persamaan (3) dan persamaan (5), kalikan kedua ruas pada persamaan (5) dengan $(a+bx+cy)$, didapatkan

$$\beta\alpha x-\gamma(a+bx+cy)=0$$
$$\Leftrightarrow \beta\alpha x-\gamma bx=\gamma(a+cy)$$
$$\Leftrightarrow (\beta\alpha-\gamma b)x=\gamma(a+cy)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\gamma(a+cy)}{\beta\alpha-\gamma b}$$

Kalikan kedua ruas pada persamaan (3) dengan $k(a+bx+cy)$ didapatkan

$$p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha y}{a+bx+cy}-\mu u=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha y}{a+bx+cy}=p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\mu u$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha y}{a+bx+cy}=p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\mu u$$
$$\Leftrightarrow k\left(\frac{\alpha y}{a+bx+cy}\right)=k\left(p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\mu u\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha yk}{a+bx+cy} = kp - xp - k\mu u$$

$$\Leftrightarrow \alpha yk = (kp - xp - k\mu u)(a+bx+cy)$$

$$\Leftrightarrow \alpha yk = (kp - xp - k\mu u)(a+bx) + (kp - xp - k\mu u)(cy)$$

$$\Leftrightarrow (kp - xp - k\mu u)cy - \alpha yk = -(kp - xp - k\mu u)(a+bx)$$

$$\Leftrightarrow \big((kp - xp - k\mu u)c - \alpha k\big)y = -(kp - xp - k\mu u)(a+bx)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{(kp - xp - k\mu u)(a+bx)}{(kp - xp - k\mu u)c - \alpha k}$$

Diperoleh $TE_3(x,y) = \left(x, -\frac{(kp-xp-k\mu u)(a+bx)}{(kp-xp-k\mu u)c-\alpha k}\right)$.

**2. Pendefinisian Fungsi Tujuan**

Definisikan fungsi tujuan

$$\min_u \int_0^T a_1x(t) + a_2y(t) + C_1u(t)dt$$

dengan kondisi batas

$$0 \le t \le T$$

$$0 \le u \le 1$$

$$C_1 \ge 0$$

Model fungsi tujuan dijadikan laju populasi baru, berupa persamaan diferensial untuk menyelesaikan kontrol optimal, dengan bentuk persamaannya yaitu

$$\frac{dz}{dt} = a_1x + a_2y + C_1u \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} - \mu ux$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y$$

Misal nilai-nilai awal $z(0) = z_0$, $x(0) = x_0$ dan $y(0) = y_0$. Persamaan *Hamiltonian* dibentuk dari perkalian fungsi tujuan dan perkalian sistem awal dengan pengali $\lambda(t) = \big(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\big)$. Didapatkan persamaan *Hamiltonian* yaitu

$$H = a_1x + a_2y + C_1u + \lambda_1\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} - \mu ux\right) + \lambda_2\left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y\right) \tag{7}$$

Persamaan *Hamiltonian* digunakan untuk menentukan persamaan *adjoint* $\frac{d\lambda_m}{dt}$, $m = 1, 2$ dengan $\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ dan $\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$.

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$= -\left(a_1 + \lambda_1\left(p(1 - x/K) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{a + bx + cy} + \frac{\alpha xyb}{(a + bx + cy)^2} - \mu u\right)\right.$$
$$\left. + \lambda_2\left(\frac{\beta\alpha y}{a + bx + cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a + bx + cy)^2}\right)\right)$$

dan

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$= -\left(a_2 + \lambda_1\left(-\frac{\alpha x}{a + bx + cy} + \frac{\alpha xyc}{(a + bx + cy)^2}\right)\right.$$
$$\left. + \lambda_2\left(\frac{\beta\alpha x}{a + bx + cy} - \frac{\beta\alpha xyc}{(a + bx + cy)^2} - \gamma\right)\right)$$

Langkah selanjutnya adalah membentuk fungsi *switching*. Terdapat satu kontrol yang diberikan pada model, sehingga fungsi *switching* didefinisikan sebagai $\varphi(t)$, dimana fungsi *switching* $\varphi(t)$ merupakan turunan pertama persamaan *Hamiltonian* terhadap kontrol pemberian pestisida *u*, yaitu

$$\varphi(t) = \frac{\partial H}{\partial u} = C_1 - \lambda_1 \mu x$$

Penyelesaian kontrol optimal model dengan kontrol pemberian pestisida pada tanaman padi akan diselesaikan dengan *Bang-bang control* dan *singular control*.

**3. Penyelesaian Kontrol Optimal Model dengan Kontrol Pemberian Pestisida Pada Tanaman Padi**

Berdasarkan kondisi batas variabel kontrol $0 \leq u \leq 1$, maka diperoleh batas kontrol optimal dengan menggunakan *Bang-bang control*, yaitu

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, \varphi < 0 \\ 1, \varphi > 0 \end{cases}$$

Ketika batas kontrol $\varphi(t) = 0$, maka penyelesaian batas kontrol optimalnya diperoleh dengan menggunakan *singular control*. Penyelesaian *singular control* dari persamaan (6) dilakukan dengan menggunakan turunan kedua dari fungsi *switching* $\varphi(t)$. Berdasarkan persamaan (6), misalkan $w = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$. Maka dalam penyelesaian singular kontrol dapat ditulis sebagai

$$\frac{dw}{dt} = f(w) + g(w)$$

$$\frac{dw}{dt} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a + bx + cy} \\ \frac{\beta\alpha xy}{a + bx + cy} - \gamma y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ -\mu x \\ 0 \end{pmatrix} u$$

dengan

$$\overline{f}(w) = \begin{pmatrix} f_1(w) \\ f_2(w) \\ f_3(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} \\ \frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y \end{pmatrix} \quad (8)$$

dan

$$\overline{g}(w) = \begin{pmatrix} g_1(w) \\ g_2(w) \\ g_3(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\mu x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Langkah pertama dalam penyelesaian *singular control* adalah menentukan turunan pertama dari fungsi *switching* $\varphi(t)$, yaitu

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \left(\lambda(t), [f, g](w)\right) \quad (10)$$

dengan $[f, g](w) = Dg(w)f(w) - Df(w)g(w)$. Urutan penyelesaian dari persamaan (10) adalah sebagai berikut.

$$Dg(w)f(w) = f_1\frac{\partial g(w)}{\partial z} + f_2\frac{\partial g(w)}{\partial x} + f_3\frac{\partial g(w)}{\partial y}$$

$$= (a_1x + a_2y)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu\left(px\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$Df(w)g(w) = g_1\frac{\partial f(w)}{\partial z} + g_2\frac{\partial f(w)}{\partial x} + g_3\frac{\partial f(w)}{\partial y}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\mu x)\begin{pmatrix} a_1 \\ p\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{(a+bx+cy)} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \\ \frac{\beta\alpha y}{(a+bx+cy)} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \end{pmatrix} + 0$$

$$= -\mu x\begin{pmatrix} a_1 \\ p\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{(a+bx+cy)} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \\ \frac{\beta\alpha y}{(a+bx+cy)} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

sehingga

$$[f,g](w) = Dg(w)f(w) - Df(w)g(w)$$

$$\begin{pmatrix} [f,g]_1(w) \\ [f,g]_2(w) \\ [f,g]_3(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right) \\ 0 \end{pmatrix} - (-\mu x)\begin{pmatrix} a_1 \\ p\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{(a+bx+cy)} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \\ \frac{\beta\alpha y}{(a+bx+cy)} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix} [f,g]_1(w) \\ [f,g]_2(w) \\ [f,g]_3(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_1 x \\ -\mu\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right) + \mu x\left(p\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{(a+bx+cy)} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ \mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{(a+bx+cy)} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) \end{pmatrix}$$

(11)

Langkah selanjutnya dalam penyelesaian *singular control* adalah dengan menentukan turunan kedua dari fungsi *switching* $\varphi(t)$. Turunan kedua dari fungsi *switching* dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\frac{d^2\varphi}{dt} = \frac{(\lambda(t), [f,[f,g]](w))}{(\lambda(t), [g,[f,g]](w))}$$

Terlebih dahulu akan diselesaikan

$$[f,[f,g]](w) = D[f,g](w)f(w) - Df(w)[f,g](w)$$

pada persamaan (11) dengan $f(w)$ dan $[f,g](w)$ berturut-turut merupakan bentuk persamaan (8) dan persamaan (11). Berikut adalah langkah penyelesaian dari $D[f,g](w)f(w)$, yaitu

$$D[f,g](w)f(w) = f_1\frac{\partial[f,g](w)}{\partial z} + f_2\frac{\partial[f,g](w)}{\partial x} + f_3\frac{\partial[f,g](w)}{\partial y}$$

$$= (a_1x + a_2y)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu x\left(-\frac{2p}{K} + \frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2} - \frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right) \\ \mu\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) + \mu x\left(-\frac{2\beta\alpha yb}{(a+bx+cy)^2} + \frac{2\alpha\beta xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right) \end{pmatrix} + \left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu\alpha x^2 b(a+bx-cy)}{(a+bx+cy)^3} \\ \frac{\mu x\beta\alpha\left(a^2+abx+acy+2bxcy\right)}{(a+bx+cy)^3} \end{pmatrix}$$

atau

$$D[f,g](w)f(w) = \begin{pmatrix} \mu a_1 \left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right) \\ \mu x\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\left(-\frac{2p}{K} + \frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2} - \frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right) + \frac{\left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y\right)\mu\alpha x^2 b(a+bx-cy)}{(a+bx+cy)^3} \\ \frac{\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\mu\beta\alpha y(a+cy)(a-bx+cy)}{(a+bx+cy)^3} + \frac{\left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy} - \gamma y\right)\mu x\beta\alpha(a^2+abx+acy+2bxcy)}{(a+bx+cy)^3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Selanjutnya akan dicari penyelesaian dari $Df(w)[f,g](w)$ sebagai berikut.

$$Df(w)[f,g](w) = [f,g]_1\frac{\partial f(w)}{\partial z} + [f,g]_2\frac{\partial f(w)}{\partial x} + [f,g]_3\frac{\partial f(w)}{\partial y}$$

$$= \mu a_1 x\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\left(\frac{-\mu x^2(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybK)}{K(a+bx+cy)^2}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ p\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{a+bx+cy} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \\ \frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2} \end{pmatrix} +$$

$$\left(\mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)\right)\begin{pmatrix} a_2 \\ -\frac{\alpha x(a+bx)}{(a+bx+cy)^2} \\ \frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$Df(w)[f,g](w) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu x^2 a_1(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk)}{K(a+bx+cy)^2} + \mu x a_2\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ -\frac{\mu x(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk)}{K(a+bx+cy)^2}\left(p\left(1-\frac{x}{K}\right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{a+bx+cy} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ + \left(\mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)\right)\left(-\frac{\alpha x(a+bx)}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ -\frac{\mu x^2(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk)}{K(a+bx+cy)^2}\left(\frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2}\right) + \\ \left(\mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)\right)\left(\frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2}\right) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Berdasarkan hasil perhitungan yang telah diperoleh pada persamaan (12) dan persamaan (13), maka penyelesaian dari

$$[f,[f,g]](w) = D[f,g](w)f(w) - Df(w)[f,g](w)$$

yaitu seperti yang tertulis pada persamaan (14) berikut ini.

$$[f,[f,g]](w) =$$

$$\begin{pmatrix} \mu a_1\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)+\frac{\mu x^2 a_1\left(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk\right)}{K(a+bx+cy)^2}- \\ \mu x a_2\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy}-\frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ \\ \mu x\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\left(-\frac{2p}{K}+\frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2}-\frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right)+\frac{\left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy}-\gamma y\right)\mu\alpha x^2 b(a+bx-cy)}{(a+bx+cy)^3} \\ +\frac{\mu x\left(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk\right)}{K(a+bx+cy)^2}\left(p\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{px}{K}-\frac{\alpha y}{a+bx+cy}+\frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)- \\ \left(\mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy}-\frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)\right)\left(-\frac{\alpha x(a+bx)}{(a+bx+cy)^2}\right) \\ \\ \frac{\left(px\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{\alpha xy}{a+bx+cy}\right)\mu\beta\alpha y(a+cy)(a-bx+cy)}{(a+bx+cy)^3}+\frac{\left(\frac{\beta\alpha xy}{a+bx+cy}-\gamma y\right)\mu x\beta\alpha\left(a^2+abx+acy+2bxcy\right)}{(a+bx+cy)^3}+ \\ \frac{\mu x^2\left(2pacy+2pbxcy+pa^2+pb^2x^2+2pabx+pc^2y^2-\alpha ybk\right)}{K(a+bx+cy)^2}\left(\frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2}\right)- \\ \left(\mu x\left(\frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy}-\frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2}\right)\right)\left(\frac{\beta\alpha y(a+cy)}{(a+bx+cy)^2}\right) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Selanjutnya akan diselesaikan

$$[g,[f,g]](w) = D[f,g](w)g(w) - Dg(w)[f,g](w)$$

seperti yang termuat pada persamaan

$$\frac{d^2\varphi}{dt} = \frac{(\lambda(t),[f,[f,g]](w))}{(\lambda(t),[g,[f,g]](w))}$$

dengan $g(w)$ dan $[f,g](w)$ secara berturut-turut merupakan bentuk persamaan (9) dan persamaan (11). Berikut adalah penyelesaian dari $D[f,g](w)g(w)$ yaitu

$$D[f,g](w)g(w) = g_1\frac{d[f,g](w)}{dz} + g_2\frac{d[f,g](w)}{dx} + g_3\frac{d[f,g](w)}{dy}$$

$$= c_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + (-\mu x)\begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu x\left(-\frac{2p}{K}+\frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2}-\frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right) \\ \frac{\mu\beta\alpha y(a+cy)(a-bx+cy)}{(a+bx+cy)^3} \end{pmatrix} + 0$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu^2 a_1 x \\ -\mu^2 x^2 \left( -\frac{2p}{K} + \frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2} - \frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3} \right) \\ -\frac{\mu^2 \beta\alpha xy(a+cy)(a-bx+cy)}{(a+bx+cy)^3} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Selanjutnya akan dicari penyelesaian dari $Dg(w)[f,g](w)$ sebagai berikut.

$$Dg(w)[f,g](w) = [f,g]_1 \frac{\partial g(w)}{\partial z} + [f,g]_2 \frac{\partial g(w)}{\partial x} + [f,g]_3 \frac{\partial g(w)}{\partial y}$$

dengan $g(w)$ dan $[f,g](w)$ berturut-turut merupakan bentuk persamaan (9) dan persamaan (11), sehingga diperoleh

$$Dg(w)[f,g](w) = \mu a_1 x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( -\mu \left( px \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} \right) + \mu x \left( p \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{a+bx+cy} + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \mu x \left( \frac{\beta\alpha y}{a+bx+cy} - \frac{\beta\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 \left( px \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\alpha xy}{a+bx+cy} \right) - \mu^2 x \left( p \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{px}{K} - \frac{\alpha y}{a+bx+cy} \right) + \frac{\alpha xyb}{(a+bx+cy)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

atau

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu^2 x^2 (2pabx + pc^2y^2 + 2pacy + 2pxybc + pa^2 + pb^2x^2 - \alpha ybK)}{K(a+bx+cy)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Berdasarkan hasil perhitungan yang telah diperoleh pada persamaan (15) dan persamaan (16) maka penyelesaian dari

$$[g,[f,g]](w) = D[f,g](w)g(w) - Dg(w)[f,g](w)$$

adalah sebagai berikut.

$[g,[f,g]](w) =$

$$\begin{pmatrix} -\mu^2 a_1 x \\ -\mu^2 x^2\left(-\frac{2p}{K}+\frac{2\alpha yb}{(a+bx+cy)^2}-\frac{2\alpha xyb^2}{(a+bx+cy)^3}\right)-\frac{\mu^2 x^2\left(2pabx+pc^2y^2+2pacy+2pxybc+pa^2+pb^2x^2-\alpha ybK\right)}{K(a+bx+cy)^2} \\ -\frac{\mu^2\beta\alpha xy(a+cy)(a-bx+cy)}{(a+bx+cy)^3} \end{pmatrix}$$

Misalkan suku-suku pada $[f,[f,g]](w) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ dan $[g,[f,g]](w) = \begin{pmatrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix}$ maka diperoleh turunan kedua dari fungsi *switching* $\varphi(t)$ adalah

$$\frac{d^2\varphi}{dt} = \frac{(\lambda(t),[f,[f,g]](w))}{(\lambda(t),[g,[f,g]](w))}$$

sehingga

$$u_{singular} = \frac{R_1+\lambda_1 R_2+\lambda_2 R_3}{R_4+\lambda_1 R_5+\lambda_2 R_6} \quad (17)$$

Berdasarkan kondisi batas variabel kontrol $0 \le u \le 1$, maka diperoleh batas kontrol optimal dengan menggunakan *Bang-bang control*, yaitu

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, \varphi < 0 \\ u_{singular}, \varphi = 0 \\ 1, \varphi > 0 \end{cases}$$

dengan bentuk persamaan fungsi *switching* adalah $\varphi(t) = c_1 - \lambda_1 \mu x$.

## 4. Hasil Simulasi

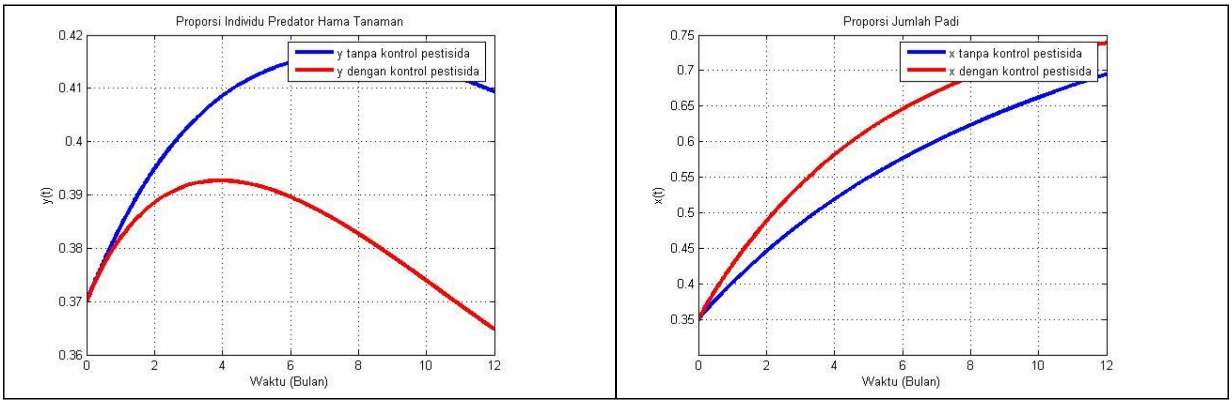
Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik untuk mengetahui pengaruh pemberian kontrol pestisida pada tanaman padi. Adapun nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai awal model

| Variabel/parameter | Nilai parameter |
|---|---|
| *x (0)* | 0,35 |
| *y (0)* | 0,37 |
| *p* | 0,3 |
| *K* | 2 |
| *a* | 10 |
| *b* | 1 |
| *c* | 0,5 |
| $\mu$ | 0,3 |
| $\alpha$ | 0,02 |
| $\beta$ | 0,5 |

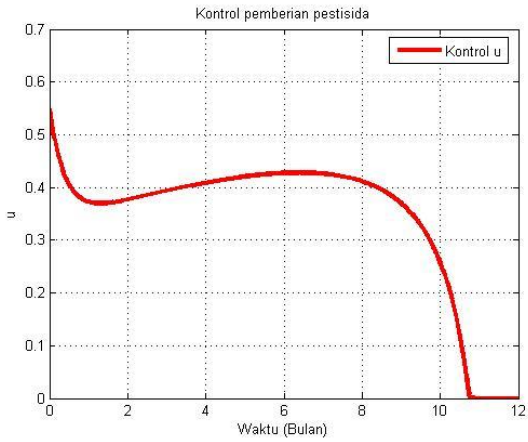
| | |
|---|---|
| $\gamma$ | 0,2 |
| $u$ | $0 \leq u \leq 1$ |

Gambar 1(a) memperlihatkan bahwa dengan adanya pemberian kontrol pestisida di lahan persawahan, maka proporsi individu predator (yaitu berupa hama tanaman) akan menurun dibandingkan apabila tidak ada pemberian pestisida pada lahan persawahan. Sedangkan pada Gambar (b) memperlihatkan akibat adanya pemberian kontrol maka jumlah hasil tanaman padi yang dapat dipanen akan lebih baik dibandingkan tanpa adanya kontrol pemberian pestisida pada lahan persawahan.




**Gambar 1. (a)** Proporsi individu predator hama tanaman dengan dan tanpa kontrol pestisida (b) Proporsi jumlah padi dengan dan tanpa kontrol pestisida

Berdasarkan grafik simulasi pada Gambar 2 dapat disimpulkan bahwa besarnya tingkat efektivitas optimal pada pemberian pestisida akan mencapai maksimum sebesar 0,55 pada hari pertama lalu menurun hingga 0,37 pada waktu $t$ = 1. Kemudian dari $t$ = 1 proporsi meningkat sebesar 0,47 pada waktu $t$ = 7 dan berangsur-angsur menurun sampai nol pada waktu akhir sehingga tidak ada lagi kontrol pestisida yang diberikan pada tanaman padi.




**Gambar 2.** Proporsi kontrol optimal pemberian pestisida

## Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil yang diperoleh kesimpulan yang dapat diambil pada penelitian ini adalah sebagai berikut (1) Batas kontrol optimal dengan menggunakan *Bang-bang control*, dengan kondisi batas variabel kontrol $0 \leq u \leq 1$ yaitu

$$u^{*}(t) = \begin{cases} 0, \varphi < 0 \\ u_{singular}, \varphi = 0 \\ 1, \varphi > 0 \end{cases}$$

dengan $u_{singular} = \frac{R_1 + \lambda_1 R_2 + \lambda_2 R_3}{R_4 + \lambda_1 R_5 + \lambda_2 R_6}$, (2) Hasil simulasi model menunjukkan bahwa dengan menggunakan *bang-bang control* dan *singular control*, diperoleh bahwa model dinamik kontrol optimal *predator-prey* dengan respon fungsional Beddington de-Angelis dengan pemberian kontrol berupa pemberian pestisida kepada hama tanaman di lahan persawahan akan mempercepat penurunan proporsi jumlah hama yang ada dan juga berpengaruh terhadap proporsi tanaman padi yang ada dan (3) Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat dilihat gambaran dinamika pada populasi tanaman padi dan populasi hama tanaman dengan adanya pemberian kontrol pestisida dengan menggunakan respon fungsional Beddington-de Angelis.

## Referensi

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. In *The American Mathematical Monthly* (Vol. 86, Issue 7). Wiley. https://doi.org/10.2307/2320609

Brady, N.C. dan Weil, R. . (2016). *The Nature and Properties of Soils* (15th editi). Pearson. http://library1.nida.ac.th/termpaper6/sd/2554/19755.pdf

Donggulo, C. V, Lapanjang, I. M., & Made, U. (2017). PERTUMBUHAN DAN HASIL TANAMAN PADI (Oryza sativa L) PADA BERBAGAI POLA JAJAR LEGOWO DAN JARAK TANAM Growth and Yield of Rice (Oryza sativa L.) under Different Jajar Legowo System and Planting Space. *J. Agroland*, *24*(1), 27–35.

Kartohardjono, A., Kertoseputo, D., Suryana, T. (n.d.). *Hama Padi Potensial dan Pengendaliannya*. http://www.litbang.pertanian.go.id/special/padi/bbpadi_2009_itp_16.pdf

Korobeinikov, A., & Wake, G. C. (2000). Global properties of the three-dimensional predator-prey Lotka-Volterra systems. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, *3*(2), 155–162. https://doi.org/10.1155/S1173912699000085

Prasad, B. S. R. V., Banerjee, M., & Srinivasu, P. D. N. (2013). Dynamics of additional food provided predator-prey system with mutually interfering predators. *Mathematical Biosciences*, *246*(1), 176–190. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.08.013

Renny dan Rina Reorita. (2019). *Model Matematika Efisiensi Penggunaan Nitrogen Pada Tanaman Padi dan Kaitannya dengan Keseimbangan Unsur Hara Makro di Dalam tanah*. https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201

Triadiati, T., Pratama, A., & Abdulrachman, S. (2012). Pertumbuhan dan Efisiensi Penggunaan Nitrogen pada Padi (Oryza sativa L.) Dengan Pemberian Pupuk Urea yang Berbeda. *ANATOMI Dan FISIOLOGI*, *XX*(2), 1–14. https://doi.org/10.14710/baf.v20i2.4767

Wibowo T.B dan Sutikno. (2016). Prediksi Serangan Hama pada Tanaman Padi Menggunakan Jaringan Syaraf Tiruan Backpropagation. *Jurnal Teknik Informatika*, *9*(2), 92–99.